CHUYÊN ĐỀ 4: CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Chứng minh hai đoạn thẳng có cùng độ dài (theo cùng đơn vị đo chiều dài).

Phương pháp 2: Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau là các cạnh của các tam giác, tứ giác đặc biệt (hình đặc biệt), tam giác bằng nhau.

Ví dụ: Hai cạnh bên của tam giác cân thì bằng nhau, các cạnh của tam giác đều thì bằng nhau, hai cạnh bên của hình thang cân, các cặp cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông thì bằng nhau.

Phương pháp 4: Chứng minh tỉ số độ dài của các cặp cạnh cần chứng minh luôn đạt giá trị bằng 1.

Phương pháp 5: Sử dụng định nghĩa, tính chất của:

Trung điểm, trung trực của đoạn thẳng.

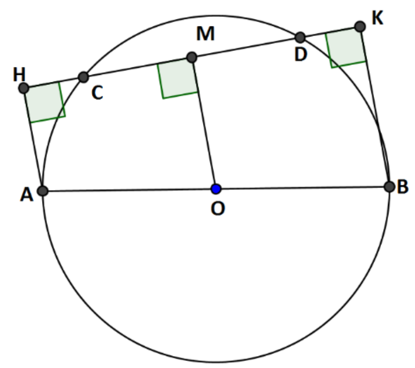
Đường trung tuyến, đường trung bình, đường trung trực, ... trong tam giác.

Đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông, ...

2 điểm, 2 đoạn thẳng đối xứng qua 1 điểm, 1 trục.

Phương pháp 6: Chứng minh hai tam giác có cùng diện tích với các đường cao, cạnh đáy tương ứng.

Phương pháp 7: Sử dụng tính chất của dây cung và tiếp tuyến với đường tròn.



2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường trong (O) đường kính, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: CH = DK.

Chứng minh

Theo giả thiết, ta có: AH $\perp$ CD và BK $\perp$ CD nên AH // BK.

Suy ra: AHKB là hình thang.

Kẻ OM $\perp$ CD tại M suy ra MC = MD (t/c đường kính và dây cung) (1)

Xét hình thang AHKB có OA = OB = R; OM // AH // BK (cùng vuông góc với CD)

OM là đường trung bình của hình thang

Suy ra MH = MK (2)

Từ (1) và (2), ta có: CH = DK.

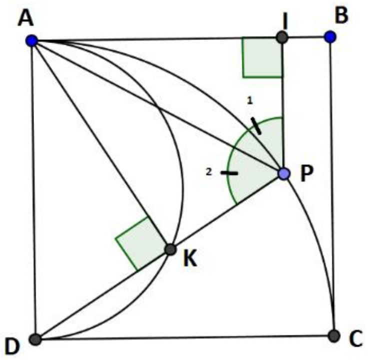
Bài tập 2: Trong hình vuông ABCD và nữa đường tròn đường kính AD và vẽ cung AC mà tâm là D. Nối D với điểm P bất kỳ trên cung AC, DP cắt nữa đường tròn đường kính AD ở K. Chứng minh PK bằng khoảng cách từ P đến AB.

Chứng minh

Kẻ PI $\perp$ AB.

Xét tam giác APK và tam giác API:

tam giác APK vuông tại K



(Vì $AKD = 90^0$ góc nội tiếp chắn nữa đường tròn đường kính AD)

tam giác ADP cân tại D

Suy ra AD = DP

Suy ra $P_2 = DAP$

Mặt khác:

$P_1 = DAP$ (So le trong vì AD // PI)

Do đó: $P_1 = P_2$

Suy ra tam giác APK = tam giác API (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau)

Suy ra PK = PI.

Bài tập 3: Cho hình thang ABCD (AB// CD) có ACD = BDC. Chứng minh rằng: AD = BC.

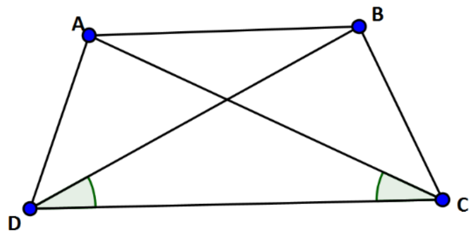
Chứng minh

Gọi E là giao điểm của AC vào BD

Xét tam giác ECD có: $D_1 = C_1$ (do $ACD = BCD$)

tam giác ECD là tam giác cân.

Suy ra ED = EC (1)



Do $B_1 = D_1$ và $A_1 = C_1$ (so le trong)

Mà $C_1 = D_1$ tam giác EAB là tam giác cân.

Suy ra: EA = EB (2)

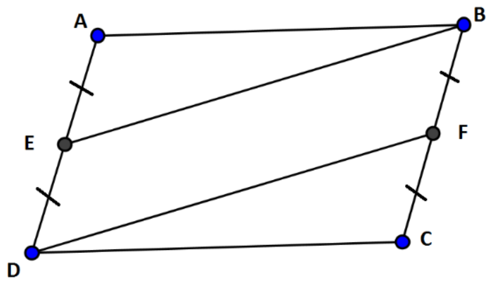
Từ (1) và (2), suy ra: AC = BD.

Hình thang ABCD có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: AD = BC.

Bài tập 4: cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng: BE = DF.

Chứng minh



Ta có: $DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC$

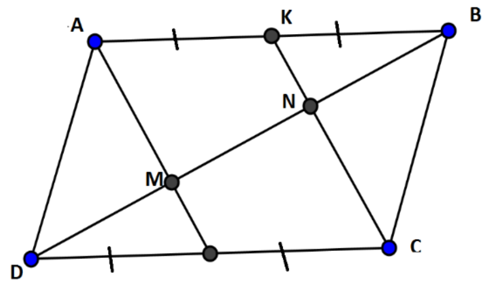
Mà AD = BC (hai cạnh đối của hình bình hành ABCD)

Suy ra DE = BF.

Mặt khác: DE // BF. Suy ra EBFD là hình bình hành.

Vậy BE = DF.

Bài tập 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng: DM = NB.



Chứng minh

Tứ giác AICK có: AK // IC và AK = IC

Suy ra tứ giác AICK là hình bình hành.

Suy ra AI // CK.

Tam giác DCN có IC = ID và IM // CN.

Suy ra: DM = MN (1)

Tam giác BAM có: BK = KA và KN // AM.

Suy ra: MN = NB (2)

Từ (1) và (2), suy ra: DM = NB.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC cân tại A.Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho BM= CN.

a) Chứng minh: AM = AN.

b) Kẻ BH $\perp$ AM ($H \in AM$), CK $\perp$ AN ($K \in AN$). Chứng minh: BH = CK.

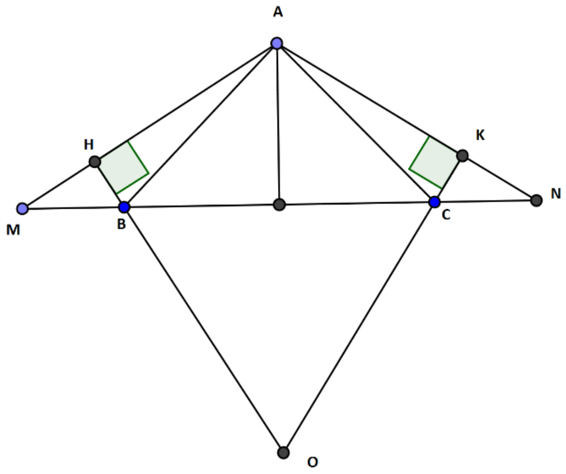
c) Chứng minh: AH = AK.

Chứng minh

a) Tam giác AMB cân

Suy ra $ABC = ACB$

Suy ra $ABM = ACN (= 180^0 + ABC)$



Tam giác ABM và tam giác ACN có:

AB = AC (giả thiết)

$ABM = ACN$ (chứng minh trên)

BM = CN (giả thiết)

Suy ra tam giác ABM = tam giác ACN (c.g.c)

Suy ra $M = N \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A suy ra AM = AN

tam giác AMN cân tại A suy ra AM = AN

b) Xét tam giác HBM và tam giác KNC có: $M = N$ (theo câu a)

MB = CN

Suy ra tam giác HMB = tam giác KNC (ch – gn)

Suy ra NK = CK.

c) Theo câu a) ta có AM = AN (1)

Theo chứng minh trên: HM = KN (2)

Từ (1), (2) Suy ra HA = AK.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình vuông ABCD. Kẻ AC cắt BD tại H. Lấy hai điểm E, F lần lượt thuộc AD, BC sao cho AE = CF, AF cắt HB tại I. Gọi M là trung điểm của IB. Chứng minh: AE= IM.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có AP là phân giác. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa đỉnh A, vẽ tia Px sao cho góc CPx bằng góc BAC. Tia này cắt AC ở E. Chứng minh rằng: PB = PE.

Bài tập 3: Gọi P là điểm nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Hạ các đường vuông góc PA1, PB1, PC1 xuống các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng A1, B1, C1 thẳng hàng.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng A1B1C1 cắt PH tại I. Chứng minh IP = IH.

Bài tập 4: Dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Vẽ hình bình hành EADF. Chứng minh BCF là một tam giác đều.

Bài tập 5: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Lấy AB và BC là cạnh dựng hai tam giác đều ABE và BCF nằm về cùng một phía bờ AC. Gọi I và J là trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng:

$$IJ = \frac{EF}{2}$$

Bài tập 6: Cho tam giác ABC và (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là A1, B1, C1. Gọi E là điểm đối xứng của B qua CI, F là điểm đối xứng của B qua AI. Chứng minh rằng $B_1E = B_1F$.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt đường tròn (O). Gọi A là hình chiếu của (O) trên d. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) ở B và C. Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt d ở E và F.

Chứng minh: AE = AF.

Bài tập 8: Cho đường trong (O) đường kính AB, dây CD cắt đường kính AB tại G. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên CD. Chứng minh rằng: CH = DK.

Bài tập 9: Cho tứ giác ACBD nội tiếp đường tròn đường kính AB. Chứng minh rằng hình chiếu

vuông của các cạnh đối diện của tứ giác trên đường chéo CD bằng nhau.

CHUÛ ÑEÀ 5

CAÙC GOÙC BAÈNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau:

Phương pháp 1: Hai góc có cùng một số đo thì bằng nhau.

Phương pháp 2: Hai góc của hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng, hai góc của tam

giác cân, đều; hai góc của cùng một đáy trong hình thang cân, hai góc đối của hình bình hành, … thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Hai góc cùng bằng một góc thứ 3.

Phương pháp 4: Tia phân giác chia một góc thành hai phần bằng nhau.

Phương pháp 5: Các góc so le trong, đồng vị, đối đỉnh, ...

Phương pháp 6: Các góc nội tiếp cùng chắn một cung trong một đường tròn thì bằng nhau.

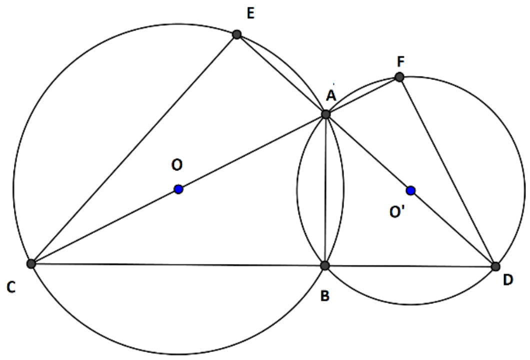
Phương pháp 7: Tứ giác nội tiếp có góc ngoài bằng góc đối trong.

Phương pháp 8: Sử dụng hàm số lượng giác: sin, cos, tan và cot.

Bài tập 1: Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại A và B. Vẽ đường kính AC và AD của (O) và (O’). Tia CA cắt đường tròn (O’) tại F, tia DA cắt đường tròn (O) tại E.
Chứng minh: $AFC = EDC$

Chứng minh

Ta có:



$CED = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$CFD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

Suy ra $CED = CFD\,(90^0)$

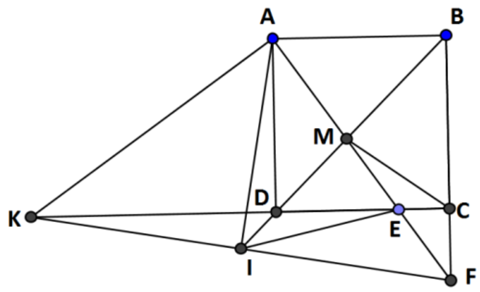
Hai đỉnh E, F cùng nhịn cạnh CD một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác CEFD nội tiếp.

$EFC = EDC$ (cùng chắn EC).

Bài tập 2: Cho hình vuông ABCD cố định. E là điểm di động

trên cạnh CD (khác C và D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K. BD cắt KF tại I.



a) Chứng minh: $CAF = CKF$

b) Chứng minh: $IDF = IEF$

c) Chứng minh: tam giác KAF vuông cân.

a) Ta có: $KAF = 90^0 (AK \perp AF)$ và $KCF = 90^0$ (ABCD là hình vuông)

Suy ra: $KAF = KCF (= 90^0)$

Hai đỉnh A, C cùng nhìn đoạn KF một góc bằng 90^0.

Suy ra: Tứ giác ACFK nội tiếp.

Suy ra $CAF = CKF$

b) Tứ giác ACKF nội tiếp nên ta có:

$AFK = ACK$ mà $AFK = 45^0, BDC = 45^0$ (là hình vuông)

Suy ra: $AFK = BDC (45^0)$

Do đó: Tứ giác IDEF nội tiếp (Vì góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

Suy ra $IDF = IEF$

c) Tam giác AKF vuông tại A (giả thiết), ta có:

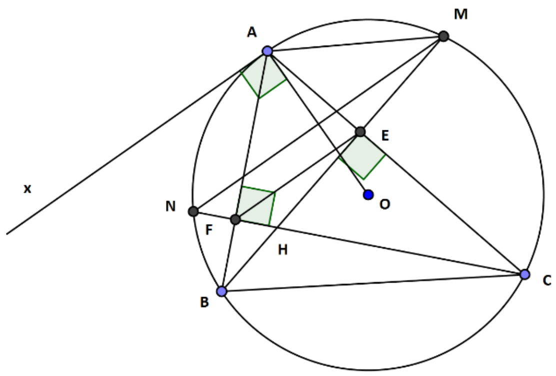
$AFK = 45^0$ suy ra $AKF = 45^0$ suy ra tam giác KAF vuông cân tại A.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp nội tiếp được đường tròn.

b) Hai tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Ax là tiếp tuyến tại A. Chứng minh $xAN = ANM$

c) Chứng minh: $MNC = EFC$.



Chứng minh

a) Tứ giác BFEC có:

$BFC = 90^0$ (CF là đường cao)

$BEC = 90^0$ (BE là đường cao)

Hai đỉnh F, E cùng nhìn cạnh BC một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác BFEC nội tiếp.

b) Vì Ax là tia tiếp tuyến của (O).

Suy ra: AO $\perp$ Ax.

Và $xAN = ACN$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Ta có: $ANM = ABM$ (cùng chắn AM)

Và $ABM = ACN$ (cùng chắn EF)

Suy ra $ANM = ACN$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $xAN = ANM$. (điều phải chứng minh)

c) Ta có: $MNC = MBC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $EFC = MBC$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

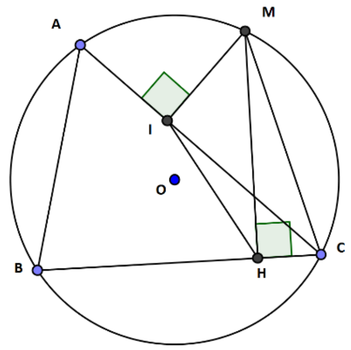
Suy ra: $MNC = EFC$. (điều phải chứng minh).

Bài tập 4: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ MH $\perp$ BC tại H, MI $\perp$ AC tại I.

Chứng minh: $IHM = ICM$

Chứng minh

Xét tứ giác MIHC, có:



$MIC = 90^0 (MI \perp AC)$

$MHC = 90^0 (MH \perp BC)$

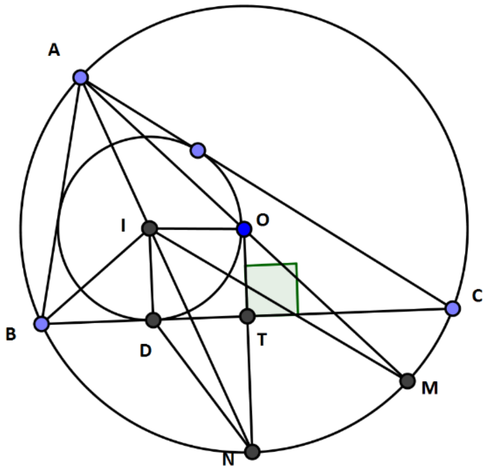
Hai đỉnh I, H cùng nhìn đoạn MC một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác MIHC nội tiếp.

Suy ra $IHM = ICM$ (cùng chắn MI)

Bài tập 5: (Đề thi HSG 12 tỉnh Đồng Nai 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có AB < BC < AC và ABC là góc nhọn. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác và tiếp xúc với BC tại D. M, N lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng AO, AI với (O). Biết A không trùng với M và N. Chứng minh: $IND = IMO$.



Chứng minh

Gọi T là giao của ON và BC.

Dễ chứng minh được:

$$IN = BN = \frac{BT}{\cos NBC} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}$$

$$\text{Suy ra } \frac{IN}{AM} = \frac{a}{2.2R.\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2.\cos\frac{A}{2}.\frac{a}{\sin A}} = \frac{\sin A}{2.\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2} = \frac{ID}{IA}$$

Mặt khác, ta có: $DIN = IAM (= IMO)$

Suy ra: $\Delta DIN \sim \Delta IAM$

Suy ra $IND \sim IMO$. (điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho BD = CE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Đường thẳng qua M và N lần lượt cắt AB và AC tại P và Q. Chứng minh rằng: $MPB = MQC$.

Bài tập 2: Cho D là trung điểm của đoạn thẳng AM. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AM ta vẽ nửa đường tròn đường kính AM và nửa đường tròn đường kính AD. Tiếp tuyến tại D của đường tròn nhỏ cắt nửa đường tròn lớn tại C và các tiếp tuyến tại C và A của đường tròn lớn cắt nhau tại B. Nối P bất kì trên cung nhỏ AC với điểm D cắt nửa đường tròn nhỏ tại K. Chứng minh rằng: AP là phân giác của BAK..

Bài tập 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a. E là điểm nằm giữa A và B, đường thẳng CE cắt dường thẳng AD tại K. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CE, cắt AB tại I.

a) Chứng minh rằng: Trung điểm của IK di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên đoạn AB.

b) Cho BE = x. Tính BK, CK, IK và diện tích tứ giác ACKI theo a và x.

Bài tập 4: Cho tam giác ABC với $A < 90^0$, có AB < AC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Vẽ đường cao AH và bán kính OA. Chứng minh rằng

$$OAH = B - C.$$

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau ở A và B (O1 và O2 thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Qua A kẻ cát tuyến cắt đường tròn ở (O1) ở C, cắt đường tròn (O2) ở D. Các tiếp tuyến của hai đường tròn kẻ từ C và D cắt nhau ở I. Chứng minh rằng khi cát tuyến CAD thay đổi thì:

a) CBD không đổi

b) CID không đổi

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD, P ở trong hình bình hành sao cho $PAB = PCB$. Chứng minh rằng: $PBA = PDA$.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD, trên BC và CD lấy 2 điểm tương ứng là M và N sao cho BN=DM. Gọi I là giao điểm của BN và DM. Chứng minh: $AID = AIB$.

Bài tập 8: Cho (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với nhau tại A. Điểm C thuộc (O_1). Kẻ tiếp tuyến của (O_1) tại C cắt (O_2) tại B và D. Chứng minh: $BAC = CAD$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD và điểm P nằm ngoài hình bình đó sao cho $PAB = PCB$ đồng thời A và C khác phía với đường thẳng PB. Qua A vẽ đường thẳng Ax //DP, qua P vẽ đường thẳng Py // AD hai đường thẳng này cắt nhau ở Q.

a) chứng minh tứ giác ABPQ nội tiếp.

b) Chứng minh: $APB = DPC$.

Bài tập 10: (NK 2006 – 2007 CD) cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H. Các đường thẳng BH và CH lần lượt cắt AC, AB tại M, N. Biết: $NHM = 120^0$

a) Chứng minh: $AMN = ABC$. Tính: $\frac{MN}{BC}$.

b) Tính: $\frac{AH}{BC}$.

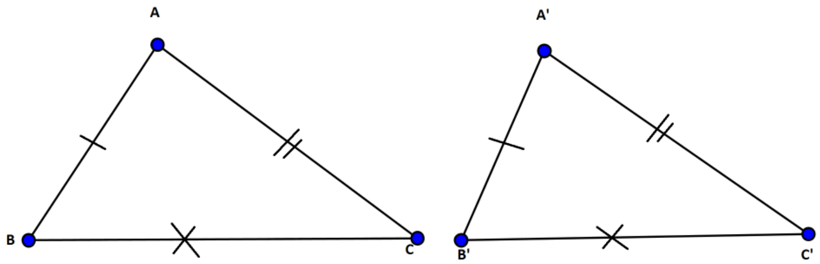
CHUÛ ÑEÀ 6

CHÖÙNG MINH HAI TAM GIAÙC BAÈNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

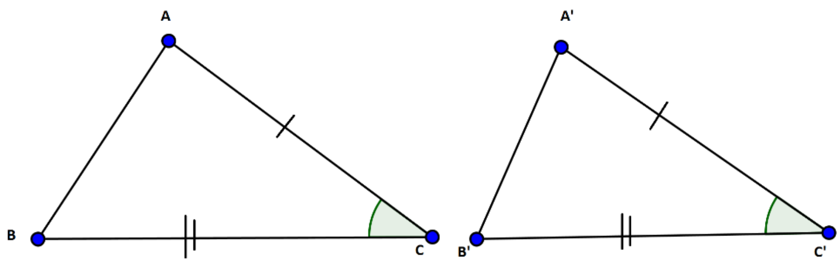
Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi thỏa mãn một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp1: Hai tam giác có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau (cạnh-cạnh-cạnh).



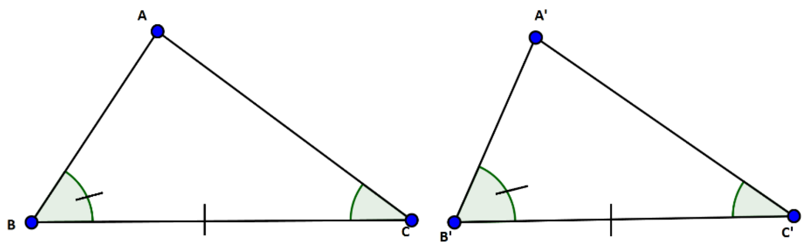
$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh-cạnh-cạnh)}$$

Trường hợp 2: Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và cặp góc xen giữa các cạnh đó bằng nhau thì bằng nhau (cạnh-góc-cạnh).



$$\left.\begin{array}{l} AC = A'C' \\ C = C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh-góc-cạnh)}$$

Trường hợp 3: Hai tam giác có một cặp cạnh bằng nhau và hai cặp góc kề với cặp cạnh ấy bằng nhau thì bằng nhau (góc-cạnh-góc).



$\left.\begin{array}{l} B = B' \\ BC = B'C' \\ C = C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (góc-cạnh-góc).

Lưu ý trường hợp bằng nhau của tam giác vuông:

Trường hợp 1: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

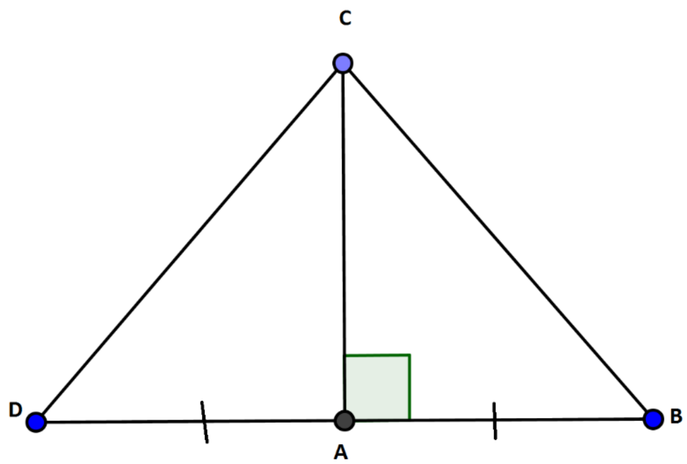
Trường hợp 2: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 4: Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $A = 90^0$. Trên tia đối của AB, lấy điểm D sao cho AB = AD. Chứng minh: $ABC = ADC$.



Chứng minh

Xét tam giác ABC và tam giác ADC có:

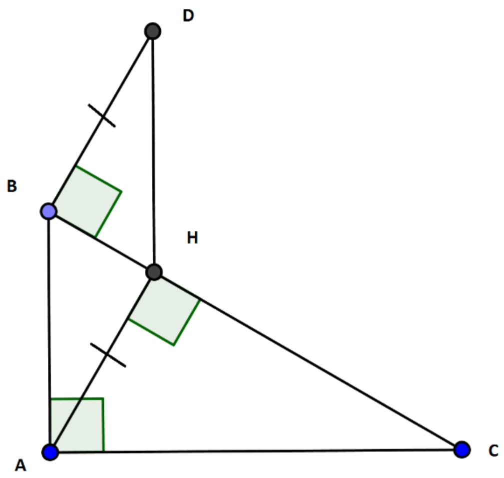
AB = AC (giả thiết)

$CAD = CAB = 90^0$

AC cạnh chung.

$\Delta ABC = \Delta ADC$ (cạnh - góc - cạnh)

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có $A = 90^0$. Đường thẳng $AH \perp BC$ tại H. Trên đường vuông góc với BC tại B lấy điểm D không cùng nửa mặt phẳng bờ BC với điểm A sao cho AH = BD.



a) Chứng minh: $\Delta AHB = \Delta ADH$

b) Chứng minh: AB // HD.

Chứng minh

a) Xét tam giác AHB và tam giác DBH, ta có:

AH = BD (giả thiết)

$A = B = 90^0$ (giả thiết)

BH là cạnh chung.

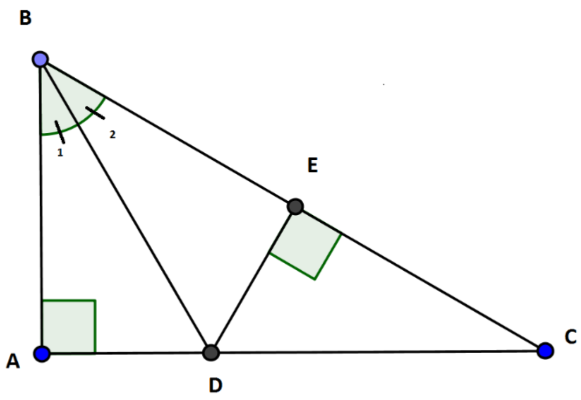
Suy ra $\Delta AHB = \Delta ADB$ (c – g – c)

b) Vì $\Delta AHB = \Delta ADB \Rightarrow ABH = BHD$ (góc tương ứng)

Mà ABH vµ BHD ở vị trí so le

Suy ra AB // HD

Bài tập 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BD là tia phân giác của góc B. Vẽ AE $\perp$ BC tại E. Chứng minh: $\Delta ABD = \Delta EBD$.



Chứng minh

Xét $\Delta ABD = \Delta EBD$, ta có:

$BAD = BED = 90^0$ (giả thiết)

BD cạnh chung.

$B_1 = B_2$ (giả thiết)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta EBD$ (cạnh huyền – góc nhọn).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh: ΔABM = ΔACM.

b) Chứng minh: AM $\perp$ BC.

Bài tập 2: Cho ABC. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, qua C kẻ đường thẳng song song với AB hai đường thẳng này cắt nhau tại D

a) Chứng minh: ΔABC = ΔADC.

b) Chứng minh: ΔADB = ΔCBD.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: ΔABO = ΔCOD.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy. Trên tia Ax lấy 2 điểm B và D, trên tia Ay lấy 2 điểm C và E sao cho AB = AC và AD = AE.

a) Chứng minh: ΔACD = ΔABE.

b) Chứng minh: ΔBOD = ΔCOE.

Bài tập 4: Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy 2 điểm A và D, trên tia Oy lấy 2 điểm C và E sao cho OD = OE và OA = OB.

a) Chứng minh: ΔODC = ΔOBE.

b) Gọi A là giao điểm của BE và CD. Chứng minh: ΔAOB = ΔAOC.

Bài tập 5: Cho ΔABC, có AB = AC. Tia phân giác của góc A cắt BC tại M.

a) Chứng minh: ΔAMB = ΔAMC.

b) Chứng minh M là trung điểm của cạnh BC.

c) K là một điểm bất kì trên đoạn thẳng AM, đường thẳng CK cắt cạnh AB tại I. Vẽ IH vuông góc với BC tại H. Chứng minh góc $BAC = 2BIH$

Bài tập 6: Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy các điểm A, B thuộc tia Ox sao cho OA < OB. Lấy các điểm C, D thuộc tia Oy sao cho OC = OA, OB = OD. Gọi M là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

a) AD = BC.

b) ΔMAB = ΔMCD.

c) OM là tia phân giác của góc xOy.

Bài tập 7: Cho ΔABC, (AB < AC) có AM là phân giác của góc A (M thuộc BC). Trên AC lấy D sao cho AD = AB.

a) Chứng minh: BM = MD

b) Gọi K là giao điểm của AB và DM. Chứng minh: ΔDAK = ΔBAC.

Bài tập 8: Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH $\perp$ BC. Kẻ HP $\perp$ AB và kéo dài để có PE = PH. Kẻ HQ $\perp$ AC và kéo dài để có QF = QH.

a) Chứng minh: ΔAPE = ΔAPH, ΔAQH = ΔAQF.

b) Chứng minh: E, A, F thẳng hàng và A là trung điểm của EF.

Bài tập 9: Cho ΔABC vuông ở C, có $A = 60^0$. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở E, kẻ EK $\perp$ AB (K $\in$ AB), kẻ BD $\perp$ AE (D $\in$ AE).

Chứng minh:

a) AK = KB

b) AD = BC

Bài tập 10: Cho ΔABC, AB = AC và M là trung điểm của AC và N là trung điểm của AB. Gọi K là giao điểm của BM và CN. Chứng minh:

a) ΔBNC = ΔCMB

b) ΔBKC cân tại K.

Bài tập 11: Cho đoạn thẳng BC. Gọi I là trung điểm của BC. Trên đường trung trực của BC lấy điểm A (A $\neq$ I)

a) Chứng minh: Δ AIB = Δ AIC.

b) Kẻ IH $\perp$ AB, kẻ IK $\perp$ AC. Chứng minh: Δ AHK có 2 cạnh bằng nhau

c) Chứng minh: HK // BC.

Bài tập 12: Cho ΔABC vuông tại A, có BD là phân giác. Kẻ DE $\perp$ BC (E$\in$ BC). Gọi F là giao điểm của AB và DE. Chứng minh rằng:

a) BD là đường trung trực của AE

b) DF = DC

c) AD < DC

d) AE // FC

Bài tập 13: Cho biết $AOB = 120^0$. Kẻ tia phân giác OC của ΔAOB. Trên tia OC lấy điểm M và OA $\perp$ HM, OB $\perp$ MK.

a) Tính số đo các HMO và KMO.

b) Chứng minh: ΔMHO = ΔMKO.

CHUÛ ÑEÀ 7

CHÖÙNG MINH HAI TAM GIAÙC ÑOÀNG DAÏNG

1. Kiến thức cơ bản:

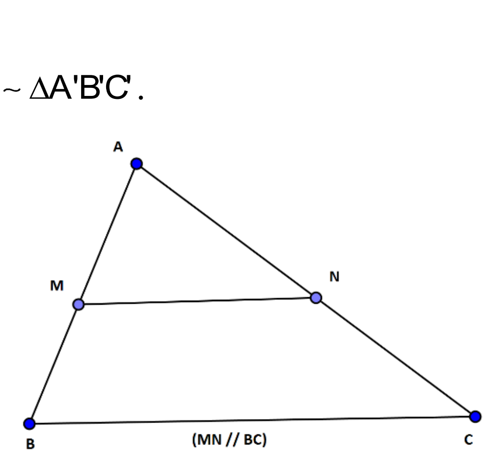
Phương pháp 1: Hai tam giác được gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ và các góc tương ứng tỉ lệ.

Xét ΔABC và ΔA'B'C', ta có:

Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ vµ $A = A'; B = B'; C = C'$ th× $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Phương pháp 2: Định lý Talet: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.Ta có:

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}; \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC};$



Phương pháp 3: Chứng minh các điều kiện cần và đủ để hai tam giác đồng dạng:

Hai tam giác có các cặp cạnh tương ứng tỷ lệ thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng tỷ lệ, hai góc xen giữa hai cặp cạnh ấy bằng nhau.

Phương pháp 4: Chứng minh trường hợp thứ nhất (cạnh-cạnh-cạnh): Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Phương pháp 5: Chứng minh trường hợp thứ 2 (cạnh-góc-cạnh): Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và 2 góc tạo bởi tạo các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam đó giác đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ A = A' \end{cases}$$

Phương pháp 6: Chứng minh trường hợp thứ 3 (góc-góc): Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases}$$

Phương pháp 7: Sử dụng chứng minh cho tam giác vuông

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó

đồng dạng.

- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỷ lẹ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia

thì hai tam giác đó đồng dạng.

- Nếu cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của

tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Phương pháp 8:

Chứng minh các tính chất của tỉ số đồng dạng để suy ra hai tam giác đồng dạng:

- Tỉ số hai đường phân giác, hai đường cao, hai đường trung tuyến, hai bán kính nội tiếp và ngoại tiếp, hai chu vi tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

- Tỉ số hai đường cao của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BH và B'H' là hai đường cao.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$

thì $\frac{BH}{B'H'} = a$

- Tỉ số hai đường phân giác của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BD và B'D' là hai đường phân giác lần lượt của $\hat{B}$ và $\hat{B'}$.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BD}{B'H'} = a$.

- Tỉ số hai đường trung tuyến của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BM và B'M' là hai đường trung tuyến.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BM}{B'M'} = a$.

- Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O'M', O'N', O'P' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$

Nế'u a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O'M', O'N', O'P' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$

Nế'u a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Nếu $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và là tỉ số đồng dạng của hai tam giác thì

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = a^2.$$

2. Bài tập áp dụng:

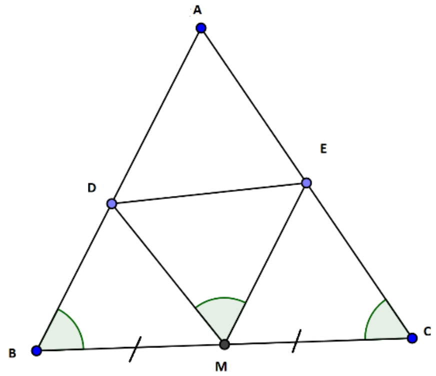
Bài tập 1: Cho ΔABC cân tại A; BC = 2a. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D và E trên AB; AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta BDM \backsim \Delta CME$

b) Chứng minh: $\Delta MDE \backsim \Delta DBM$

c) Chứng minh: BD.CE không đổi?

Chứng minh



a) Ta có: $DBM = ECM$ (1)

và $DBM = DCM$ (giả thiết)

Mà

$DBM + BMD + MDB = 180^0$

$DME + BMD + CME = 180^0$

Suy ra $MDB = CME$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: ΔBDM ∽ ΔCME (g - g).

b) Vì ΔBDM ∽ ΔCME nên

$\frac{BD}{CM} = \frac{DM}{ME}$ và BM = CM (giả thiết)

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{DM}{ME}$

Suy ra ΔMDE ∽ ΔDBM.

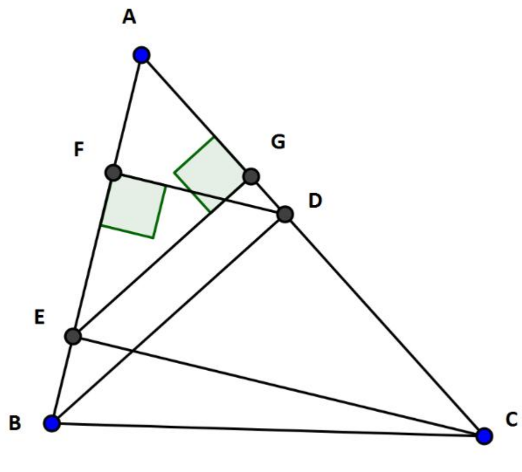
c) Vì ΔBDM ∽ ΔCME

Suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE}$

Suy ra BD.CE = CM . BM

Mà CM = BM = $\frac{BC}{2} = a \Rightarrow BD.CE = \frac{a^2}{4}$ (không đổi)

Bài tập 2: Cho ΔABC, BD và CE là 2 đường cao của ΔABC. DF và EG là 2 đường cao của ΔADE.



Chứng minh rằng: ΔADE ∽ ΔABC đồng dạng.

Chứng minh

Xét ΔADB và ΔAEC, ta có:

A là góc chung.

$AEC = ADB = 90^0$

Suy ra ΔADB ∽ ΔAEC (g - g)

Suy ra: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

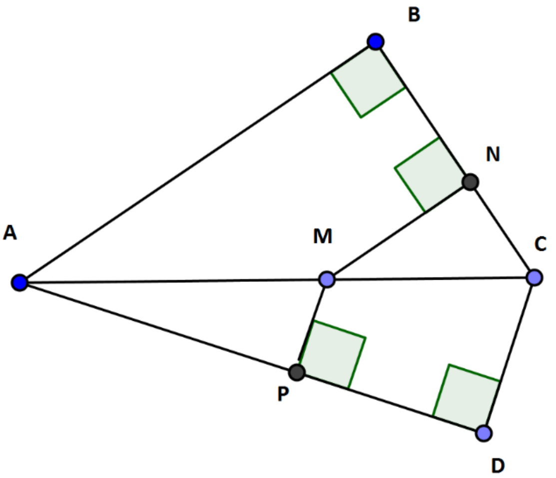
Và $A = 90^0$

$\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g - c – g)

Bài tập 3: Lấy điểm M trên đường chéo AC của tứ giác ABCD có $B = 90^0$. Kẻ MN $\perp$ BC (N $\in$ BC) và MP $\perp$ AD (P $\in$ AD). Chứng minh: MN

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1.$$

Chứng minh



Vì AB $\perp$ BC (giả thiết)

MN $\perp$ BC (giả thiết)

Nên MN // AB

Suy ra $\Delta CNM \backsim \Delta CBA$ suy $\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC}$ (1)

Ta có: MP // CD nên $\Delta AMP \backsim \Delta ACD$

Suy ra $\frac{MP}{CD} = \frac{AM}{AC}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = \frac{MC + AM}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$$

Vậy $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1.$

Bài tập 4: Cho đoạn thẳng AB. Gọi O là trung điểm của AB. Vẽ về 1 phía AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy C trên Ax, D trên By sao cho $COD = 90^0$.

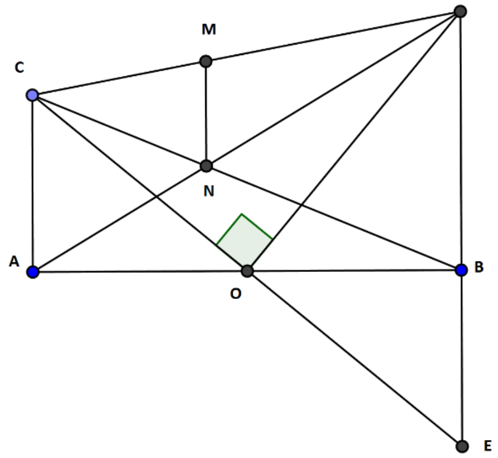
a) Chứng minh rằng: $\Delta ACO \backsim \Delta BDO$.

b) Chứng minh rằng: CD = AC + BD.

c) Kẻ OM $\perp$ CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng: MN // AC.

Chứng minh

a) Ta có:



$AOC = BOE$ (1)

$BOE + BOD = 90^0$

Suy ra $BOE = BDO$ (2)

Xét ΔACO và ΔBDO, có:

$OAC = DBO = 90^0$ (giả thiết)

$BOE = BDO = 90^0$ (theo (2))

Suy ra ΔACO ∽ ΔBDO (g - g)

b) Kẻ CO cắt DB tại E.

Ta có: ΔAOC = ΔBOE (g - c - g)

Suy ra OC = OE.

Xét ΔCOD và ΔEOD, có:

OC = OE (chứng minh trên)

$COD = EOD = 90^0$

OD là cạnh chung.

Suy ra ΔCOD = ΔEOD (c - g - c).

Suy ra CD = ED (cạnh tương ứng).

Ta có: AC = BE suy ra AC + BD = BE + BD = ED (Vì CD = ED)

Vậy: AC + BD = CD.

c) Ta có: ΔANC ∽ΔDNB.

Suy ra $\frac{AN}{ND} = \frac{AC}{BD}$

$\frac{AN}{ND} = \frac{BE}{BD}$ (vì AC = BE)

Vì CD = ED nên ΔCDE cân tại D.

Suy ra OD là đường cao hạ từ đỉnh D.

Theo chứng minh ở câu b, ta có:

OB = OM (2 đường cao tương ứng)

CM = BE (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

MD = BD (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

$$\frac{AN}{ND} = \frac{BE}{BD} = \frac{CM}{MD} \Leftrightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$$

Theo định lý Talet, ta có: MN // AC.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình bình hành ABCD với đường chéo $AC > BD$. Gọi E và F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

a) Chứng minh rằng: $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$.

b) Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ một điểm E trên cạnh BC, ta kẻ Ex // AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: $FE + EG = 2AM$.

Bài tập 3: Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, BD và CE là 2 đường cao của ΔABC. DF và EG là 2 đường cao của ΔADE.

Chứng minh rằng:

a) $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

b) FG // BC.

Bài tập 5: Cho ΔABC ($AB < AC$). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) So sánh $BAH = CAH$

b) So sánh 2 đoạn thẳng BD và CE.

c) Chứng minh: $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Bài tập 6: Cho 4 điểm A, E, F, B theo thứ tự ấy trên 1 đường thẳng. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các hình vuông ABCD; FGHE.

a) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh: $\Delta OHE \backsim \Delta OBC$.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng CE và FD cùng đi qua O.

Bài tập 7: Cho ΔABC có các trung điểm của BC, CA, AB theo thứ tự là D, E, F. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi P là giao điểm của AM và BE; Q là giao điểm của CF và AN. Chứng minh rằng:

a) F, P, D thẳng hàng và D, Q, E thẳng hàng.

b) $\Delta ABC \backsim \Delta DQP$.

Bài tập 8: Cho ΔABC; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, giao điểm 3 đường trung trực của Δ. Gọi E, D theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Chứng minh :

a) ΔOED ∽ ΔHCB

b) ΔGOD ∽ ΔGBH

c) Ba điểm O, G, H thẳng hàng và GH = 2OG.

Bài tập 9: Cho ΔABC, AD là phân giác A ; AB < AC. Trên tia đối của DA lấy điểm I sao cho $ACI = BDA$. Chứng minh rằng:

a) Δ ADB ∽ Δ ACI; Δ ADB ∽ Δ CDI

b) $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H.

Chứng minh rằng:

a) AE.AC = AF.AB

b) Δ AFE ∽ Δ ACB

c) Δ FHE ∽ Δ BHC

d) $BF.BA + CE.CA = BC^2$

CHUÛ ÑEÀ 8

HEÄ THÖÙC LÖÔÏNG TRONG TAM GIAÙC VUOÂNG

1. Kiến thức cơ bản:

(1) $BC^2 = BH.BC$

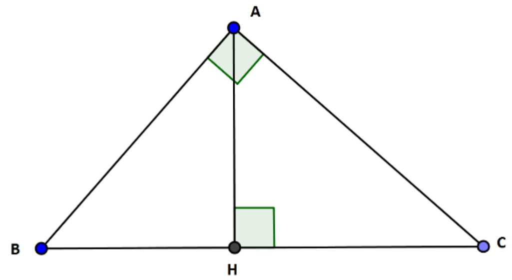
(2) $AB^2 = BH.BC$;

$AC^2 = CH.BC$

(3) $AB.AC = AH.BC$

(4) $AH^2 = BH.HC$

(5) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$



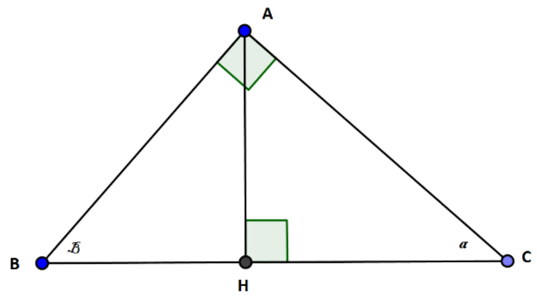
Kết quả:

Với tam giác đều cạnh là a, ta c:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2};S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

Tỉ số lượng giác áp dụng trong tam giác vuông:

Đặt $ACB=\alpha;ACB=\beta,$khi đó:



$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{HC};$

$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{HC}{AC};$

$\tan\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{HC};$

$\cot\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{HC}{AH};$

$b=a\sin B=a\cos C=c\tan B=c\cot C$

$c=a\cos B=a\sin C=b\cot B=b\tan C$

Kết quả suy ra:

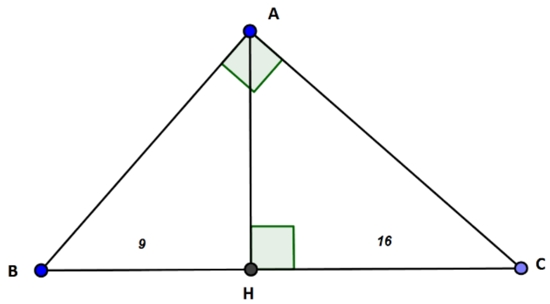
(1) $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta;\tan\alpha=\cot\beta;\cot\alpha=\tan\beta$

(2) $0<\sin\alpha<1;0<\cos\alpha<1;\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\tan\alpha\cot\alpha=1;1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 9cm, CH = 16cm.



a) Tính độ dài các cạnh AB, AC.

b) Tính chiều cao AH.

Giải

a) Ta có: BC = BH + HC = 9 + 16 = 25 (cm)

Δ ABC vuông tại A, AH $\perp$ BC (giả thiết)

Sử dụng hệ thức về góc vuông và hình chiếu của nó lên cạnh huyền, ta có:

AB^2 = BH.HC = 9.25 = 225.

Suy ra $AB=\sqrt{225}=15(cm)$

AC^2 = CH.CB = 16.25 = 400

Suy ra: $AC = \sqrt{400} = 20(cm)$

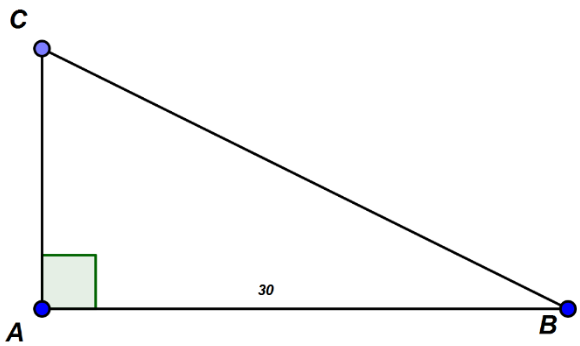
b) Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao thuộc cạnh huyền và hình chiếu của hai góc vuông trên cạnh huyền, ta có:

AH^2 = BH.HC = 9.16 = 144 suy ra AH = 12 (cm)

Bài tập 2: Cho Δ ABC vuông tại A, AB = 30 (cm), tan B = 8/15

a) Tính AC, BC.

b) Tính sin B, cos B, cot B.



Giải

a) Trong Δ ABC vuông tại A, ta có:

tan B = $\frac{AC}{AB} = \frac{8}{15}$ mà AB = 30 (cm)

nên ta có:

mà AB = 30 (cm) nên ta có:

$\frac{AC}{AB} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow AC = \frac{30.8}{15} = 16(cm)$

Theo định lý Pitago, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$

Suy ra: BC = 34 (cm)

b) Theo định nghĩa, ta có các tỉ số lượng giác của các góc là:

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{16}{34}$

$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{30}{34}$

$\tan B = \frac{AB}{AC} = \frac{30}{16}$

Bài tập 3: Cho Δ ABC, đường cao AH (H $\in$ BC), $B = 42^0$ AB = 12cm, BC = 22cm. Tính các cạnh và góc còn lại của tam giác.

Giải

Trong Δ AHB vuông tại H, $B = 42^0$ nên $HAB = 90^0 - 42^0 = 48^0$

Áp dụng hệ thức lượng liên hệ giữa các cạnh và góc trong của tam giác vuông AHB, ta có:

AH = AB.sinB = 12.sin $42^0 \approx$ 8,028 (cm)

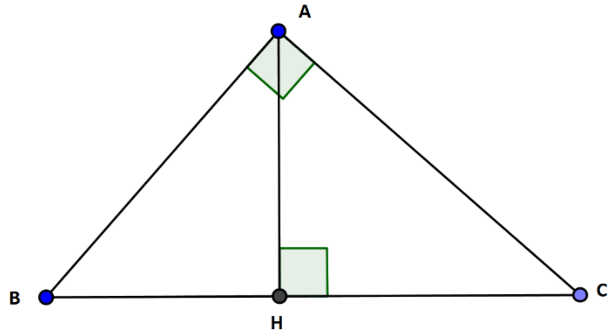
BH = AB.cosB = 12.cos $42^0 \approx$ 8,916 (cm)

Trong tam giác vuông AHB, ta có:

$$\tan C = \frac{AH}{HC} \approx \frac{0,028}{13,084} = 0,614$$

$$\Rightarrow C \approx 31^0 30'$$

$$\Rightarrow HAC \approx 90^0 - 31^0 30' = 59^0 30'$$



Do đó:

$$\Rightarrow BAC = 48^0 + 58^0 30' = 106^0 30'$$

Suy ra:

$$AC = \frac{AH}{\sin C} \approx \frac{8,028}{\sin 31^0 30'} \approx 15,35 (cm)$$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho Δ ABC vuông tại A, biết:

a) a = 72 cm, $B = 58^0$

b) b = 20 cm, $B = 48^0$

c) b = 15 cm, $C = 30^0$

d) b = 21cm, c = 18 cm.

Bài tập 2: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết HB = 25 cm, HC = 64cm. Tính B, C.

Bài tập 3: Chứng minh rằng: Nếu một tam giác có hai cạnh bằng a và b, góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng đó bằng c thì diện tích của tam giác đó bằng: $S = \frac{1}{2} ab.\sin C$

Bài tập 4: Cho Δ ABC có, AB = 16cm và $B = 60^0$.

a) Tính BC.

b) Tính S_{ABCD}.

Bài tập 5: Cho Δ ABC vuông tại A. Gọi H là chân đường cao hạ từ A. Biết rằng AB = 7cm, AC = 9cm. Tính BH, CH, AH.

Bài tập 6: Cho Δ ABC vuông cân tại A, đường cao AH. Biết BC = a, AH = h. Tính độ dài cạnh bên theo a, h

Bài tập 7: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HM $\perp$ AB tại M. Chứng minh: $BM = \frac{AB^3}{BC^2}$

Bài tập 8: Cho Δ ABC có AB = 48cm, AC = 14cm, BC = 50cm. Tính độ dài đường phân giác của góc C.

Bài tập 9: Cho Δ ABC vuông tại A có AB = 3cm; BC = 5cm. AH là đường cao. Tính BH; CH; AC và AH.

Bài tập 10: Cho Δ ABC cân tại A có BC = 16cm; AH = 6cm. Một điểm D $\in$ BH sao cho BD = 3,5 cm. Chứng minh: Δ DAC vuông.

Bài tập 11: Cho Δ ABC vuông tại A có AC = 10cm; AB = 8cm. Tính:

a) BC.

b) Hình chiếu của AB và AC lên BC.

c) Đường cao AH.

Bài tập 12: Cho đường tròn tâmO bán kính R = 10 cm.Dây cung AB bất kỳ có trung điểm I.

a) Tính AB nếu OI = 7 cm.

b) Tính OI nếu AB = 14 cm.

Bài tập 13: Cho đường tròn tâm O có đường kính AB = 26,5 cm. Vẽ dây cung AC = 22,5 cm. H là hình chiếu của C trên AB, nối BC. Tính BC; BH; CH và OH.

Bài tập 14: Hình thang ABCD cân; đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10 cm và góc A là 60^0.

a) Tính cạnh BC.

b) Gọi M; N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

Bài tập 15: Cho đa giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng 60^0 và góc A là 90^0.

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính khoảng cách BH và Điều kiện từ B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ BE $\perp$ DC kéo dài. Tính BE; CE và DC.

Bài tập 16: Cho đoạn thẳng AB = 2a. Từ trung điểm O của AB vẽ Ox $\perp$ AB tại O. Trên Ox lấy D: $OD = \frac{a}{2}$. Từ B kẻ BC $\perp$ AD kéo dài.

a) Tính AD; AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn OE = a. Chứng minh: Bốn điểm A, C, B và E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tính chất CE với góc ACB.

c) Vẽ đường vuông góc với BC tại B cắt CE tại F. Tính BF.

d) Gọi P là giao điểm của AB và CE. Tính AP và BP.

Bài tập 17: Cho Δ ABC nhọn, nội tiếp (O; R) có: $AOB = 90^0$ và $AOC = 120^0$

a) Chứng minh: O ở trong tam giác ABC.

b) Tính các góc tam giác ABC.

c) Tính đường cao AH và BC theo R.

Bài tập 18: Cho Δ ABC có ba góc nhọn. AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Bài tập 19: Cho Δ ABC có ba góc nhọn. AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh rằng:

$b^2 = a^2 + c^2$ - 2ac.cos B.

Bài tập 20: Cho Δ ABC vuông tại A, $C=\alpha\ (\alpha<45^0)$ trung tuyến AM. Đường cao AH. Biết BC = a, AC = b, AH = h.

a) Tính: $\sin\alpha, \sin 2\alpha$, theo a, b, h.

b) Chứng minh rằng: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

Bài tập 21: Cho Δ ABC cân tại A. Đường cao thuộc cạnh bên bằng h, góc ở đáy bằng α. Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{h^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Bài tập 22: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB = 20 cm, cạnh bên AD = 8 cm và tạo với đáy lớn AB một góc 65^0.

a) Tính độ dài đường cao AH và đáy nhỏ CD.

b) Tính số đó góc ABD và đường chéo BD.

Bài tập 23: Cho hình thang ABCD $A = D = 90^0$, AD = 30 cm, CD = 18 cm và BC = 20 cm.

a) Tính cách góc ABC, BCD.

b) Tính các góc DAC, ADB và dộ dài các đường chéo AC, BD.

Bài tập 24: Cho Δ ABC. Biết AB = 10cm, AC = 24cm, BC = 26cm.

a) Chứng minh rằng: Δ ABC vuông tại A.

b) Tính: sin B, sin C.

c) Tính chiều cao AH và đoạn thẳng mà chiều cao nó chia ra trên BC.

CHUÛ ÑEÀ 9

CHÖÙNG MINH CAÙC HEÄ THÖÙC HÌNH HOÏC

1. Kiến thức cơ bản:

- Dùng định lý Talet, tính chất đường phân giác, tam giác đồng dạng, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, …

Giả sử cần chứng minh: MA.MB = MC.MD

Lập sơ đồ: $MA.MB = MC.MD \Leftarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Leftarrow \Delta MAD \sim \Delta MCB$ hoặc $\Delta MAC \sim \Delta MDB$

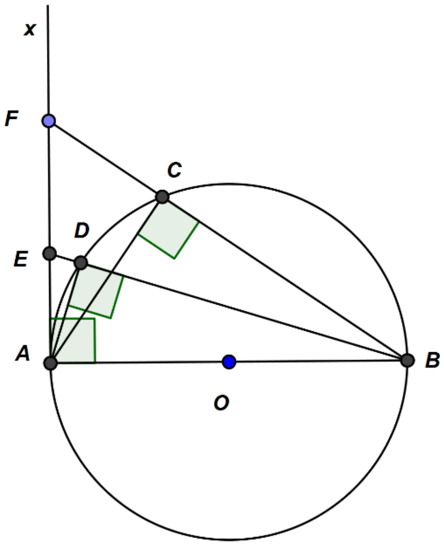
Ngoài ra cần chú ý đến việc sử dụng các hệ thức trong tam giác vuông; phương tích của một điểm với đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O; R), tiếp tuyến Ax. Trên tiếp tuyến Ax, lấy điểm F sao cho BF cắt đường tròn tại C. Tia phân giác của góc ABF cắt Ax tại E và cắt đường tròn tại D.

a) Chứng minh OD // BC.

b) Chứng minh hệ thức: BD.BE = BC.BF



Chứng minh

a) Δ BODcân ở O (vì OD = OB = R)

Suy ra $OBD = ODB$

Mà $OBD = CBD$ (giả thiết) nên $OBD = CBD$

Do đó: OD // BC.

b) Ta có:

$ABD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

Suy ra $AD \perp BE$.

$ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

Suy ra $AC \perp BF$.

ΔEAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có AD $\perp$ BE nên AB^2 = BD.BE (1)

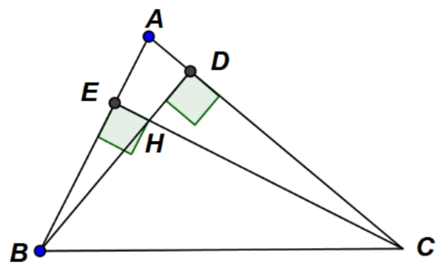
Δ FAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có AC $\perp$ BF nên AB^2 = BC.BF (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BD.BE = BC.BF

Bài tập 2: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp.

b) Chứng minh: AD.AC = AE.AB.



Chứng minh

a) Xét tứ giác BCDE, có:

$BDC = 90^0$

$BEC = 90^0$

Ta có hai đỉnh D, E cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác BCDE nội tiếp.

b) Xét Δ ADB và Δ AEC, ta có:

$ADB = AEC = 90^0$ (vì BD, CE là hai đường cao)

A là góc chung.

Suy ra Δ ADB ∽ Δ AEC (g - g).

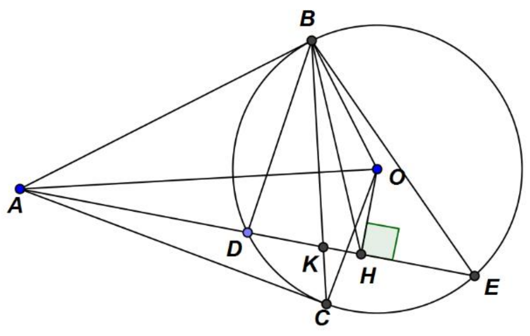
Suy ra $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD.AC = AE.AB$

Bài tập 3: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa A và E, dây DE không qua tâm O). Gọi H là trung điểm của DE, AE cắt BC tại K .

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn .

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của BHC

c) Chứng minh: $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$.



Chứng minh

a) Ta có: $ABO = ACO = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

Trong tứ giác ABOC có $ABO + ACO = 180^0$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Ta có: AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Suy ra: $AB = AC$

Do đó: $AHB = AHC$.

Vậy HA là tia phân giác của BHC.

c) Chứng minh: $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$.

Xét Δ ABD và Δ AEB, có:

BAE là góc chung

$ABD = AEB(= \frac{1}{2} \text{sđ} BD)$

Suy ra: Δ ABD ∽ Δ AEB

Do đó: $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (1)

Xét Δ ABK và Δ AHB, có:

BAH là góc chung

$ABK = AHB$ (do $AB = AC$)

Suy ra Δ ABK ∽ Δ AHB.

Suy ra: $\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow AB^2 = AK.AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AE.AD = AK.AH

Suy ra $\frac{1}{AK} = \frac{AH}{AE.AD}$

Suy ra $\frac{2}{AK} = \frac{2AH}{AE.AD} = \frac{2(AD + DH)}{AE.AD} = \frac{2AD + 2DH}{AE.AD} = \frac{AD + AD + ED}{AE.AD} = \frac{AE + AD}{AE.AD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$

(do AD + DE = AE và DE = 2DH).

Vậy $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$ (đpcm).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho (O) có đường kính AB. Qua A kẻ tiếp tuyến xy. Lấy điểm M $\in$ Ax; nối BM cắt (O) tại C. Chứng minh: MA^2 = MB.MC.

Bài tập 2: Cho Δ ABC đều, nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên cung BC (BC là cung nhỏ). CD và AB kéo dài cắt nhau ở M; BD và AC kéo dài cắt nhau ở N. Chứng minh: AB^2 = BM.CN.

Bài tập 3: Cho Δ ABC có AB < AC. Từ M $\in$ AB vẽ MEF // BC cắt AC tại E và đường thẳng song song AB vẽ từ C tại F. AC cắt BF tại I. Chứng minh: IC^2 = IE.IA.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 36 mm; AD = 24 mm. Từ D nối đến trung điểm M của AB cắt AC tại I và CB kéo dài tại K. Chứng minh: ID^2 = IM.IK.

Bài tập 5: Cho Δ ABC vuông tại A. Vẽ phân giác trong AD của góc A (D $\in$ BC). Gọi khoảng cách từ D đến AB là d. Biết AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh: $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài tập 6: Cho (O; R) và hai dây cung song song nhau AD và BE ở về hai phía của dây AB và cùng hợp với AB một góc 45^0. Nối DE cắt AB tại M. Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MD^2 + ME^2 = 4R^2$.

Bài tập 7: Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng xy theo thứ tự trên. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB.AC$.

Bài tập 8: Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, lấy một điểm P tuỳ ý.

Gọi là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh: $BC^2 = AP.AQ$.

b) Trên AP lấy điểm M sao cho PM = PB. Chứng minh: BP + PC = AP.

c) Chứng minh: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD (AC > BD). Vẽ CE $\perp$ AB và FC $\perp$ AD. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ Ex // AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: FE + EG = 2AM.

Bài tập 11: Cho Cho hình bình hành ABCD, trên Đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} + \frac{CB}{CN}$.

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 12: Lấy 1 điểm O trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P,Q, R. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC (AB = AC) có góc ở đỉnh bằng 20^0; cạnh đáy là a; cạnh bên là b.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài tập 14: Cho Δ ABC có $\hat{A} = 30^0$. Dựng bên ngoài Δ BCD đều. Chứng minh: $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài tập 15: Cho Δ ABC cân tại A ($A = 90^0$). Từ B kẻ BM $\perp$ AC. Chứng minh rằng:
$\frac{AM}{AC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$.

CHUÛ ÑEÀ 10

TÖÙ GIAÙC NOÄI TIEÁP ÑÖÔØNG TROØN

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp:

- Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.
- Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 1800 (bù nhau).
- Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc bằng nhau.
- Chứng minh tổng của góc ngoài tại một đỉnh với góc trong đối diện bù nhau.
- Nếu MA.MB = MC.MD hoặc NA.ND = NC.NB thì tứ giác ABCD nội tiếp.

(Trong đó: $M = AB \cap CD, N = AD \cap BC$)

- Nếu PA.PC = PB.PD thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó $P = AC \cap BD$)
- Chứng minh tứ giác đó là hình thang cân; hình chữ nhật; hình vuông; …

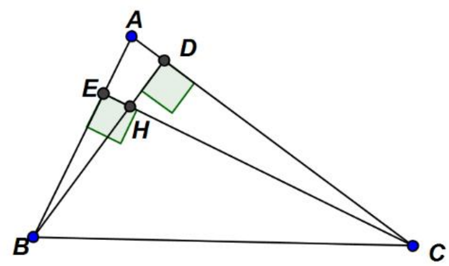
Nếu cần chứng minh cho nhiều điểm cũng thuộc một đường tròn ta có thể chứng minh lần lượt 4 điểm một lúc. Song cần chú ý tính chất “Qua 3 điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một đường tròn”

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho Δ ABC, BD, CE là hai đường cao. Chứng minh: Tứ giác BCDE và AEHD nội tiếp.

Chứng minh

Xét tứ giác BCDE, có:



$BDC = BEC = 90^0$ (vì BD, CE là hai đường cao)

A là góc chung.

Suy ra hai đỉnh E, D cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90^0.

Suy ra Tứ giác BCDE nội tiếp.

Xét tứ giác AEHD, có:

$AEH = 90^0$ (EC là đường cao)

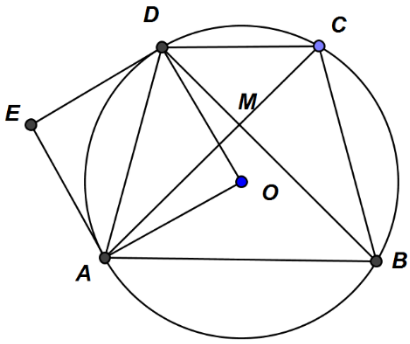
$ADH = 90^0$ (BD là đường cao)

Suy ra $AEH + ADH = 180^0$

Suy ra tứ giác AEHD nội tiếp.

Bài tập 2: Cho hình thang cân ABCD (AB > CD, AB // CD) nội tiếp trong đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D chúng cắt nhau ở E. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Chứng minh



Ta có:

$EAC = \frac{1}{2}s®AC$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AE và dây AC của đường tròn (O))

Tương tự:

$xDB = \frac{1}{2}s®DB$ (Dx là tia đối của tia tiếp tuyến DE)

Mà AC = BD (do ABCD là hình thang cân) nên $AC = BD$.

Do đó $EAC = xDB$.

Vậy tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Bài tập 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, dây cung AC. Gọi M là điểm chính giữa cung AC. Đường thẳng kẻ từ C song song với BM cắt tia AM ở K và cắt tia OM ở D. OD cắt AC tại H. Chứng minh tứ giác CKMH nội tiếp.

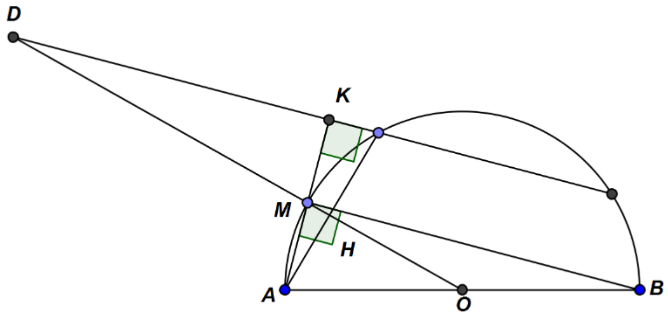
Chứng minh

Ta có: $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

Suy ra $AM \perp MB$

Mà CD // BM (giả thiết) nên AM $\perp$ CD .

Vậy $MKC = 90^0$.



Ta có:

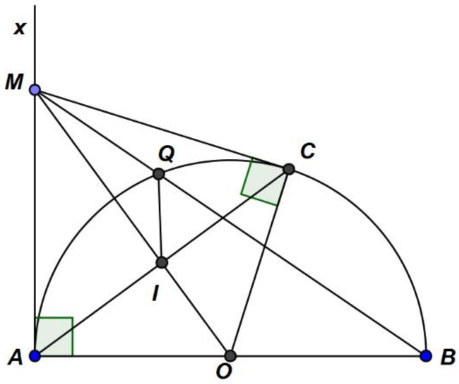
$AM = CM$ (giả thiết)

Suy ra OM $\perp$ AC

Suy ra $MHC = 90^0$.

Tứ giác CKMH có $MKC + MHC = 180^0$ nên nội tiếp được đường tròn.

Bài tập 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ điểm M trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng MB cắt nửa đường tròn (O) tại Q. Gọi giao điểm của MO và AC là I. Chứng minh rằng: Tứ giác AMQI nội tiếp.



Chứng minh

Ta có:

MA = MC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

OA = OC (bán kính đường tròn (O))

Do đó: MO $\perp$ AC suy ra $MIA = 90^0$.

$AQB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

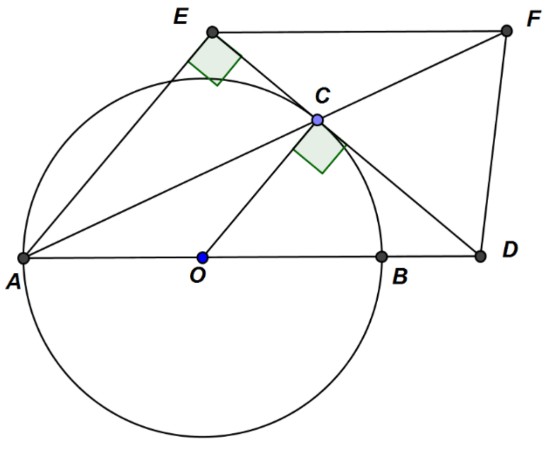
Suy ra $MQA = 90^0$

Suy ra hai đỉnh I, Q cùng nhìn cạnh AM với một góc bằng 90^0

Suy ra tứ giác AMQI nội tiếp được trong đường tròn

Bài tập 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC.

Chứng minh: Tứ giác EFDA nội tiếp.



Chứng minh

Ta có:

$AED = 90^0$ (vì AE $\perp$ CD tại E)

$AFD = 90^0$ (vì DF $\perp$ AC tại F)

Suy ra hai đỉnh E, F cùng nhìn cạnh AD với một góc bằng 90^0.

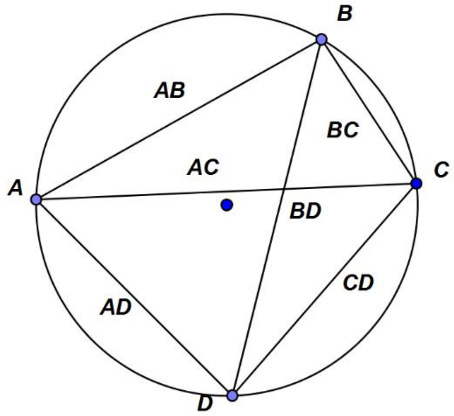
Suy ra tứ giác EFDA nội tiếp.

Bài tập 6: (Định lý Plôtêmê)

a) Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.
b) Nếu một tứ giác thỏa mãn điều kiện tổng các tích của các cặp cạnh đối diện bằng tích của hai đường chéo thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh

Gọi ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn.



Trên cung nhỏ BC, ta có các góc nội tiếp:

$BAC = BDC$, và trên cung AB, $ADB = ACB$.

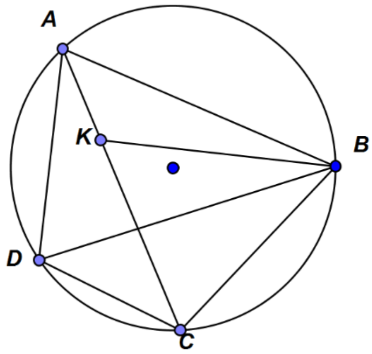
Lấy 1 điểm K trên AC sao cho $ABK = CBD$

Từ $ABK + CBK = ABC = CBD + ABD.$

Suy ra $CBK = ABD.$

Do vậy tam giác ΔABK $\backsim$ ΔDBC, và tương tự có ΔABD $\backsim$ ΔKBC.

Suy ra $\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD}$ và $\frac{CK}{BC} = \frac{DA}{BD}$



Từ đó AK.BD = AB.CD và CK.BD = BC.DA

Cộng các vế của 2 đẳng thức trên: AK.BD + CK.BD = AB.CD + BC.DA;

Hay: (AK+CK).BD = AB.CD + BC.DA;

Mà AK+CK = AC, nên AC·BD = AB.CD + BC.DA. (Điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. M là một điểm trên tiếp tuyến xBy. AM cắt (O) tại C; lấy D $\in$ BM; nối AD cắt (O) tại I. Chứng minh: Tứ giác CIDM nội tiếp.

Bài tập 2: Cho Δ ABC vuông tại A có AB = 5cm và AC = $5\sqrt{3}$ cm. Đường cao AH (H $\in$ BC). Đường tròn (H; HA) cắt AB tại D và AC tại E. Chứng minh: Tứ giác CEBD nội tiếp.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B vẽ Ax $\perp$ AB và By $\perp$ BA. Vẽ tiếp tuyến x'My' (tiếp điểm M) cắt Ax tại C và By tại D. OC cắt AM tại I và OD cắt BM tại K. Chứng minh: Tứ giác CIKD nội tiếp.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ bán kính OC $\perp$ AB. Từ B vẽ tiếp tuyến Bx. Gọi M là trung điểm OC, AM kéo dài cắt đường tròn tại E và Bx tại I. Tiếp tuyến từ E cắt Bx tại D.

Chứng minh: Tứ giác MODE nội tiếp.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC ($BAC < 45^0$) nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Dựng tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến tiếp tuyến đó. AH cắt đường tròn (O) tại M (M $\neq$ A). Đường vuông góc với AC kẻ từ M cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác MKCH nội tiếp.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N (A $\neq$ M và N). Chứng minh:

a) $AHN = ACB$

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc đường tròn đó (C $\neq$ A và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và BC. Các đường thẳng BN và AC cắt nhau tại I, các dây cung AN và BC cắt nhau ở P. Chứng minh tứ giác ICPN nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB . Trên tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn này lấy điểm C sao cho AC = AB. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của đường tròn (O; R), với D là tiếp điểm.

Chứng minh rằng tứ giác ACDO nội tiếp.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O) đường kính AB bằng 6cm . Gọi H làđiểm nằm giữa A và B. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D. Hai đường thẳng BC và DA cắt nhau tại M. Từ M hạ đường vuông góc MN với đường thẳng AB (N thuộc thẳng AB). Chứng minh MNAC là tứ giác nội tiếp.

CHUÛ ÑEÀ 11

CAÙC ÑÖÔØNG THAÚNG ÑOÀNG QUY

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Áp dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.

Phương pháp 2: Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng cũng đi qua điểm đó.

Phương pháp 3: Dùng định lý đảo của định lý Talet.

Phương pháp 4: Định lý Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M $\in$ BC. Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh MA và MC tại E và F đồng thời tiếp xúc với cả đường tròn (O) tại K. Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.

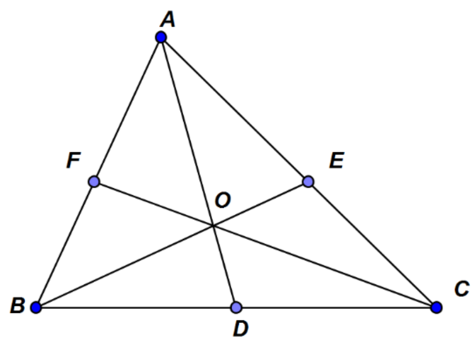
Định lý Pascal: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó các giao điểm của các cặp cạnh AB và DE, BC và EF, CD và FA thẳng hàng.

Phương pháp 6:

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.

Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = 1$$



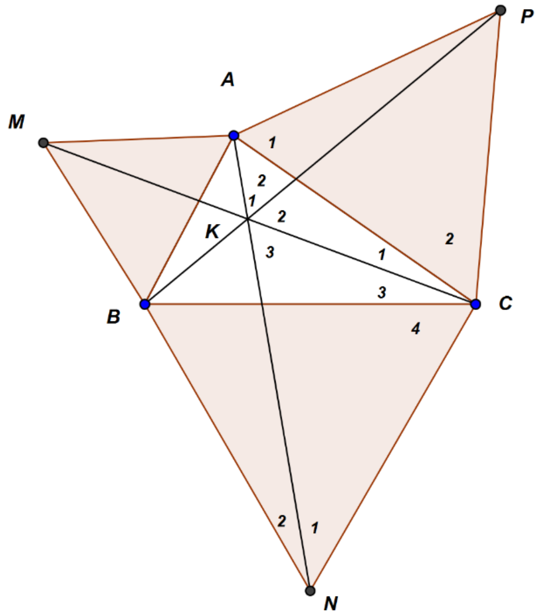
2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) MC = NA = PB

b) $\left(\overline{AM},\overline{MC}\right)=\left(\overline{MC},\overline{BP}\right)=\left(\overline{BP}.\overline{NA}\right)=60^0$

c) MC, NA, PB đồng quy



Chứng minh

a) Xét Δ ABN và Δ MBC, có:

AB = MB;

BC = BN (các cạnh của tam giác đều)

$ABN = MBC$ (cùng bằng 60^0 + ABC)

Suy ra Δ ABN = Δ MBC (c.g.c)

Suy ra AN = MC (*)

Tương tự: Δ ABP = Δ AMC (c.g.c)

AB = AM;

BC = BN (các cạnh của tam giác đều)

$BAP = MAC$ (cùng bằng 60^0 + BAC)

Suy ra BP = MC (**)

Từ (*) và (**) ta có: AN = MC = BP (đpcm).

b)

Trong Δ APC, có: $A_1+C_2+P_1+P_2=180^0$ mà $P_1=C_1$ P = C

Trong Δ PCK, có: $C_1+C_2+P_2+K_2=180^0$

Suy ra $60^0+\left(C_1+P_2\right)+K_2=180^0 \Rightarrow K_2=60^0$ (1)

Tương tự: Δ ABN = Δ MBC

Suy ra $N_1=C_3$ mà $N_1+N_2=60^0$

Suy ra $N_2+C_3=60^0$ mà $C_4=60^0$

Suy ra Δ NKC có $N_2+C_3+C_4+K_3=180^0$0

Suy ra $K_3=60^0$ (2)

Tương tự: Δ ACN = Δ PCB

Suy ra $P_2 = A_2$ mà $P_1 + P_2 = 60^0$

Suy ra $P_1 + A_2 = 60^0$ mà $A_1 = 60^0$

Suy ra Trong Δ AKP, có: $K_1 = 60^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh

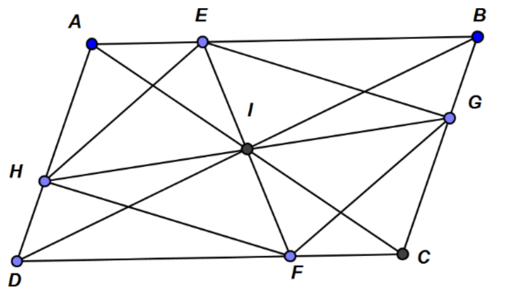
c) Giả sử $MC \cap BP = K$, ta chứng minh cho A, K, N thẳng hàng.

Theo chứng minh trên ta có: $K_1 = 60^0, K_2 = 60^0, K_3 = 60^0 \Rightarrow K_1 + K_2 + K_3 = 180^0$

Suy ra A,K,N thẳng hàng

Vậy AN, MC, BP đồng quy (đpcm)

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD. Trên AB và CD lấy 2 điểm E và F sao cho AE = CF. Trên AD và BC lấy H và G sao cho DH = BG.



a) Chứng minh: Tứ giác EGFH là hình bình hành

b) Chứng minh: AC, BD, EF, GH cắt nhau tại 1 điểm.

Chứng minh

a) Xét Δ DHF và Δ BGE, ta có:

DH = BG

$HDF = GBE$ (vì ABCD là hình bình hành)

DF = BE (vì AE = CF)

Suy ra Δ DHF = Δ BGE

Suy ra HF = EG (1)

Mặt khác, ta có:

$DHG = BGH$ và $DHF = BGE \Rightarrow FCG = EGH$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: Tứ giác EGFH là hình bình hành.

b) (Theo câu a)

Suy ra tứ giác EGFH là hình bình hành

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo HG và EF (của hình bình hành EGFH)

Ta lại có: Tứ giác AGCH là hình bình hành (AH // CG và AH = CG)

Suy ra giao của 2 đường chéo HG và AC là I (I trung điểm HG)

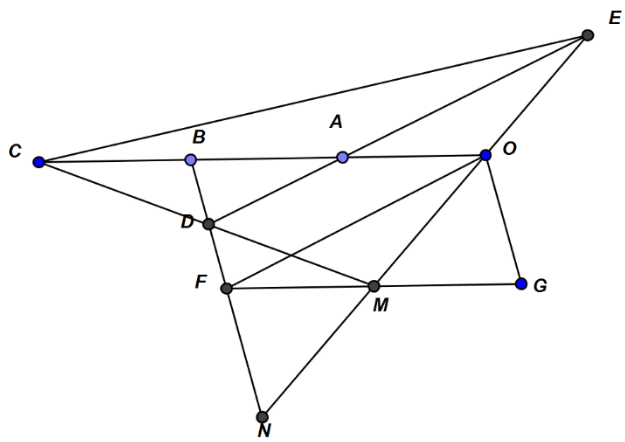
Tương tự, ta có: Hình bình hành HBGD có giao điểm của 2 đường chéo là HG và BD tại I (I là trung điểm HG)

Suy ra HG, EF, AC, BD cắt nhau tại điểm I (cũng là điểm duy nhất).

Bài tập 3: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Trên d_1 lần lượt lấy ba điểm phân biệt A, B, C khác O sao cho OA = AB = BC. Trên d_2 lần lượt lấy ba điểm E, M, N khác O sao cho OE = OM = MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, BN và CM đồng quy.

Chứng minh

Gọi D là giao điểm của BN và CM.



Qua M kẻ đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.

Qua O kẻ đường thẳng song song với BN cắt MF tại G.

Xét Δ FBO và Δ OGF, ta có:

$BOF = GFO$ (so le trong)

OF là cạnh chung

$BFO = GOF$ (so le trong)

Suy ra Δ FBO = Δ OGF (g-c-g).

Suy ra FG = BO (1)

Xét Δ NFM và Δ OGM, ta có:

$GOM = FNM$

MO = MN

$OMG = NMF$ (đối đỉnh)

Suy ra Δ NFM = Δ OGM.

Suy ra MF = MG (2)

Từ (1) và (2), suy ra: MF = OA = AB = BC.

Sử dụng kết quả vừa tìm được này kết hợp:

$DCB = DMF$ (so le trong) và $DBC = DFM$ (so le trong)

Suy ra: Δ DBC = Δ DFM (g-c-g).

Do đó: DC = DM

hay D là trung điểm của CM (3)

Xét Δ CEM, ta có:

CO là trung tuyến ứng với cạnh ME (do OE = OM) nên $CA = \frac{2}{3}CO$

Suy ra A là trọng tâm của Δ CEM.

Suy ra AE đi qua trung điểm của cạnh CM. (4)

Từ (3) và (4), ta suy ra AE đi qua D.

Vậy BN,CM và AE đồng quy tại D.

Bài tập 4: Cho Δ ABC, các đường cao AD, BE, CF của tam giác đồng quy tại H. Gọi I là trung điểm của HC.

a) Chứng minh BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp Δ DEF và DIEF là tứ giác nội tiếp 1 đường tròn.

c) Về phía ngoài Δ ABC dựng các Δ ABM và Δ CAN sao cho chúng là các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BN, CM đồng quy.

Chứng minh

a) HS tự làm.

b) Ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác AEHF, AEDB nội tiếp trong đường tròn.

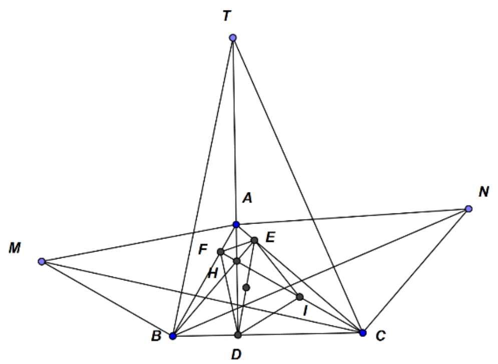
Khi đó, ta có:

$FAH = FEH$ (cùng chắn FH) và $FAH = BAD$

$BAD = BED$ (cùng chắn BD) và $BED = HED$

Suy ra $FEH = HED$

Suy ra HE là tia phân giác của FED.



Tương tự, ta có:

HF là tia phân giác của EFD.

HD là tia phân giác của EDF.

Suy ra H là giao điểm của 3 đường phân giác trong của Δ DEF.

Vậy H là tâm của đường trong nội tiếp Δ DEF.

* Theo chứng minh ở trên, ta có:

$FED = 2FAD$ và $FAD = FCD$ (HS tự chứng minh tứ giác ACDF nội tiếp)

$HID = 2FCD$ (góc ngoài bằng tổng của 2 góc trong không kề)

Suy ra $FED = 2FAD = 2FCD = HID = FID$

Hay $FED = FID$

Suy ra tứ giác EIDF nội tiếp.

c) Trên tia đối tia AD, lấy T sao cho AT = BC.

$MBC = 90^0 + ABC = TAB$

Suy ra

Δ MBC = Δ BAT (c - g - c)

Suy ra $BTD = BCM$

Suy ra CM $\perp$ TB

Tương tự, ta có: BN $\perp$ TC.

Mà TD $\perp$ BC

Vậy TD, CM, BN đồng quy (3 đường cao của Δ TBC)

Bài tập 5: Cho tứ giác ABCD, AD, BC không song song, nội tiếp đường tròn (O). P là giao điểm của AC và BD. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các đoạn PA, PB và tiếp xúc trong với (O) tại E. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với các đoạn PC, PD và tiếp xúc trong với (O) tại F. Chứng minh rằng AD, BC, EF đồng quy.

Chứng minh

Giả sử (O_2) tiếp xúc PB, PC tại X, Y và tiếp xúc (O) tại F.

Theo bổ đề Sawayama (định lí Lyness mở rộng) ta có XY đi qua H, K (với H,K là tâm nội tiếp các Δ ADC, Δ BDC.

Gọi Z, T là giao điểm của HK trên AD, BC. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cung AD, BD, AC, BC của (O). Vì (O2) tiếp xúc AC, BD nên F, X, N và F, Y, P thẳng hàng.

Ta sẽ chứng minh: M, Z, F thẳng hàng.

Thật vậy: Gọi Z′ là giao của FM và AD. AN giao BM tại S. Gọi R là trung điểm cung CD.

Theo định lí Pascan cho lục giác MFNADB ta có S, Z′, X thẳng hàng.

Tiếp tục với lục giác NARBMC ta có H, K, S thẳng hàng.

Mà H, K, X thẳng hàng, nên ta có Z′, X, H, K thẳng hàng hay Z′ trùng Z.

Tương tự, ta có: F, T, Q thẳng hàng.

Gọi (O3) là đường tròn tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc (O) tại cung nhỏ DC.

Ta sẽ chứng minh (O_3) là (ZFT).

Thật vậy, gọi Z", T" là tiếp điểm trên AD, BC của (O_3) thì theo bổ đề Sawayama, ta cũng có Z", T", H, K thẳng hàng hay Z", T" trùng Z, T.

Mà MZ và NT cắt nhau tại F nên ta có ngay ZFT chính là (O_3).

Từ đó, ta quy bài toán về phát biểu đơn giản hơn như sau: (O_3) tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc cung nhỏ CD tại F.

Tương tự có E.

Khi đó AD, BC, EF đồng quy.

Bài tập 6: Chứng minh dựa vào định lý CEVA.

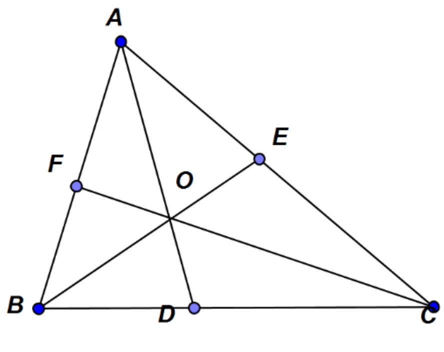
Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.

Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$$

Chứng minh

Giả sử AD, BE và CF đồng qui tại một điểm O nào đó (trong hay ngoài tam giác). Do Δ BOD và Δ COD có chung chiều cao (độ dài của đường cao), ta có:



$$\frac{S_{BOD}}{S_{COD}}=\frac{BD}{DC}$$

Tương tự

$$\frac{S_{BAD}}{S_{CAD}}=\frac{BD}{DC}$$

Suy ra

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{BAD}-S_{BOD}}{S_{CAD}-S_{COD}}=\frac{S_{ABO}}{S_{CAO}}$$

Tương tự

$$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{BCO}}{S_{ABO}}$$

và

$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{CAO}}{S_{BCO}}$

Nhân ba đẳng thức trên cho ta:

$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$ (điều phải chứng minh).

Ngược lại, giả sử rằng ta đã có những điểm D, E và F thỏa mãn đẳng thức. Gọi giao điểm của AD và BE là O, và gọi giao điểm của CO và AB là F'. Theo chứng minh trên

$$\frac{AF'}{F'B}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$$

Kết hợp với đẳng thức trên, ta nhận được: $\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$

Thêm 1 vào mỗi vế và chú ý rằng AF" + F"B = AF + FB = AB, ta có:

$$\frac{AB}{F'B}=\frac{AB}{FB}$$

Do đó F"B = FB, vậy F và F" trùng nhau . Vì vậy AD, BE và CF = CF" đồng qui tại O, và định lí đã được chứng minh (là đúng theo cả hai chiều).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh MC, NA, PB đồng quy.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC và có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp 3 tam giác đều trên đều đồng quy tại một điểm.

Bài tập 3: Gọi A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp Δ ABC với các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: AA', BB', CC' đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh

$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1\Leftrightarrow$ AA', BB', CC' đồng quy

Bài tập 4: Cho hình thang ABCD (AB > CD). Gọi E là giao điểm hai cạnh bên AD và BC; F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: AC, BD, CF đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BK, CL cắt nhau tại I. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của IA, IB, IC. Chứng minh PD, QE, RF đồng quy. Gọi J là điểm đồng quy, chứng minh I là trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn

Chứng minh PEDQ, PRDF là hình chữ nhật

Suy ra PD, QE, RF là đường chéo của 2 hình chữ nhật đó

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho Δ ABC nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi A', B', C' là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB. Qua H, vẽ đường thẳng d bất kì. Chứng minh rằng: Các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của Δ ABC đồng quy tại một điểm trên (O).

Hướng dẫn

Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của Δ ABC.

Gọi I là giao của d_1 và d_2

Chứng minh tứ giác A'B'C'I là tứ giác nội tiếp. Suy ra A'B'C'I là nội tiếp (O).

Chứng minh I thuộc d_3.

CHUÛ ÑEÀ 12

BA ÑIEÅM THAÚNG HAØNG

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1:

Tiên đề Ơ'clit: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với a.

Hệ quả: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với a.

Phương pháp 2: Chứng minh qua một điểm có hai đường thẳng vuông góc với 1 đường thẳng cho trước tại điểm đó.

Phương pháp 3: Chứng minh tổng hai góc bằng 180^0 (sử dụng tứ giác nội tiếp, các góc bằng nhau...).

Phương pháp 4: Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường cao, phân giác, trung trực, trung tuyến...

Phương pháp 5: Chứng minh điểm AM + MB = AB thì A thuộc đoạn thẳng BC. Suy ra A, B, C thẳng hàng.

Phương pháp 7: Dùng tính chất đường trung trực: Chứng minh các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng cho trước thì đều nằm trên một đường thẳng.

Phương pháp 8: Dùng tính chất tia phân giác: Chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.

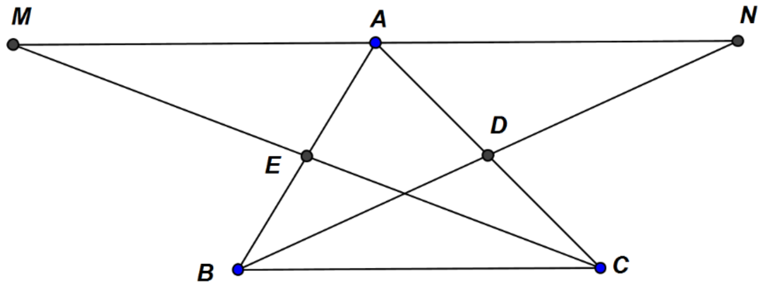
Phương pháp 9: Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.

Phương pháp 10: Sử dụng tính chất đường kính và dây cung của đường tròn.

Phương pháp 11: Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau. Đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường trong và tiếp tuyến chung thì vuông góc với nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho Δ ABC với hai trung tuyến BD và CE. Gọi M và N theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia EC và DB sao cho EC = EM và DB = DN. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.



Giải

Tứ giác AMBC có:

EA = EB,

EM = EC (gt)

Nên là hình bình hành.

Suy ra: AM // BC (1)

Chứng minh tương tự, ta có:

AN // BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng (tiên đề Ơcơlit).

Bài tập 2: Cho hình chữ nhật ABCD (AB < CD), có O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho CE = CD. Gọi F là hình chiếu của của D trên BE; I là giao điểm của AB và CF; K là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng ba điểm O, K, I thẳng hàng.

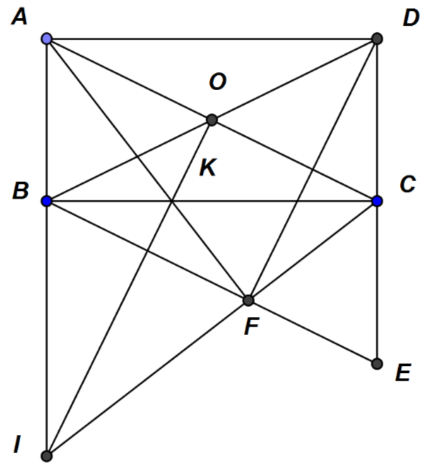
Giải

ABCD là hình chữ nhật nên:

AB = CD, AC = BD và OA = OB = OC = OD.

Ta có CB $\perp$ AI (vì ABCD là hình chữ nhật)

Suy ra CB là đường cao của Δ CAI (1)



Δ FBD vuông tại F (vì F là hình chiếu của D lên BE) có:

FO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BD nên $OF=\frac{1}{2}BD$

Suy ra $OF=\frac{1}{2}AC$

Δ FAC có FO là đường trung tuyến ứng với cạnh AC.

Mà $OF=\frac{1}{2}AC$ nên Δ FAC vuông tại F.

Suy ra AF $\perp$ CI hay AF là đường cao của Δ CAI. (2)

K là giao điểm của AF và CB nên từ (1) và (2), suy ra K là trực tâm của Δ CAI.

Do đó IK $\perp$ AC (3)

Mặt khác, tứ giác ABEC có:

AB = CE (cùng bằng CD) và AB // CE (vì AB // CD) nên là hình bình hành

Suy ra BE // AC suy ra BF // AC suy ra ABFC là hình thang.

Lại có Δ FDE vuông tại F, FC là trung tuyến ứng với cạnh DE (vì CD = CE) nên CF = CD suy ra CF = AB (vì AB = CD).

Suy ra Δ BAC = Δ FCA (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra AF = BC.

Hình thang ABFC có hai đường chéo AF và BC bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: $IAC = ICA \Rightarrow \Delta IAC$ cân tại I

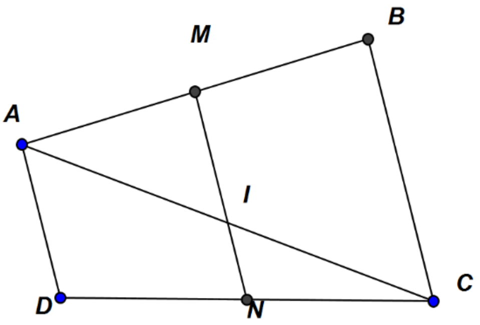
Suy ra IO là trung tuyến đồng thời là đường cao.

Hay IO $\perp$ AC (4)

Từ (3) và (4) suy ra I, K, O thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, I và N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và CD. Chứng minh rằng nếu $MN=\frac{AD+BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và ABCD trở thành hình thang.

Giải



Giả sử: $MN = \frac{AD + BC}{2}$

Vì MA = MB, IA = IC nên MI là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra: MI // BC và $MI = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh tương tự ta có: IN // AD và $IN = \frac{1}{2}AD$

Mà $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$ hay MN = MI + IN.

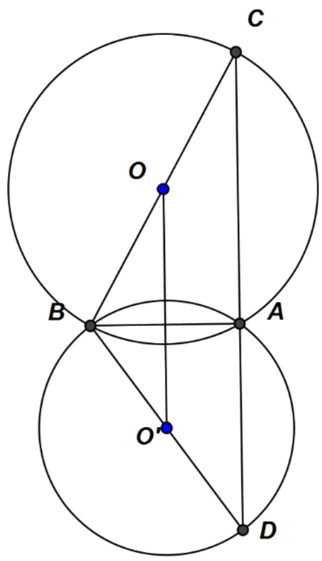
Từ đó suy ra I nằm giữa M và N, hay M, I, N thẳng hàng.

Lúc đó, ta có: BC // AD vì cùng song song với MN.

Do đó ABCD trở thành hình thang.

Vậy nếu $MN = \frac{AD + BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và ABCD trở thành hình thang.

Bài tập 4: Đường tròn tâm O và đường tròn tâm O' cắt nhau tại A và B.



Gọi C, D lần lượt đối xứng với B qua O và O'. Chứng minh rằng C, A, D thẳng hàng.

Giải

Vì C đối xứng với B qua O nên O là trung điểm của BC. Suy ra BC là

đường kính của (O). Ta có OA = OB = OC = $\frac{1}{2}BC$ nên

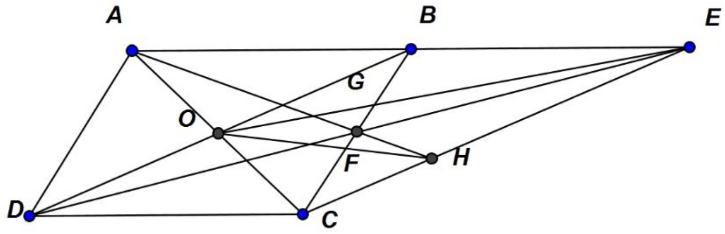
tam giác ABC vuông tại A

Suy ra $BAC = 90^0$

Chứng minh tương tự ta có: $BAD = 90^0$.

Do đó C, A, D thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo; E là điểm đối xứng của A qua B; F là giao điểm của BC và ED; G là giao điểm của BC và OE; H là giao điểm của EC và OF. Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.



Giải

Vì O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD nên OA = OC

suy ra EO là trung tuyến của Δ EAC.

E đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của EA.

Suy ra CB là trung tuyến của Δ EAC.

G là giao điểm của CB và EO nên G là trọng tâm của Δ EAC   (1)

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên CD // AB, CD = AB

Mà B là trung điểm của AE nên suy ra CD // BE, CD = BE.

Do đó tứ giác BECD là hình bình hành.

Từ đó F là trung điểm của hai đường chéo ED và BC của hình bình hành BECD.

Ta có OF là đường trung bình của Δ CAB nên OF // AB suy ra OH // AE suy ra HE = HC.

Do đó AH là trung tuyến của Δ EAC   (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, G, H thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy hai điểm E và F sao cho BE = DF. Kẻ EH $\perp$ AB, FK $\perp$ CD (H $\in$ AB, K $\in$ CD). Gọi O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm H, O, K thẳng hàng.

Giải

Vì EH $\perp$ AB, FK $\perp$ CD và AB // CD nên EH // FK   (1)

Xét Δ HBE và Δ KDF có BE = DF, $KDF = HBE, DKF = BHE = 90^0$

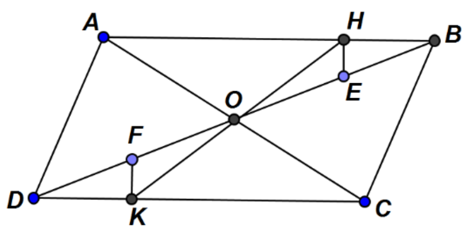
Suy ra Δ HBE = Δ KDF (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra HE = KF   (2)

Từ (1) và (2) suy ra HEKF là hình bình hành

Suy ra trung điểm của EF cũng là trung điểm của HK.

Vậy E, H, K thẳng hàng (đpcm).



Bài tập 7: Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AC, MN. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Giải

Gọi K’ là giao điểm của IJ với MN.

Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N, M tới đường thẳng IJ.

Dễ thấy M, N nằm về hai phía của IJ.

Ta có : $S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NDI} - S_{NJC} - S_{NCI} - S_{CID}$

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{AIC} - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

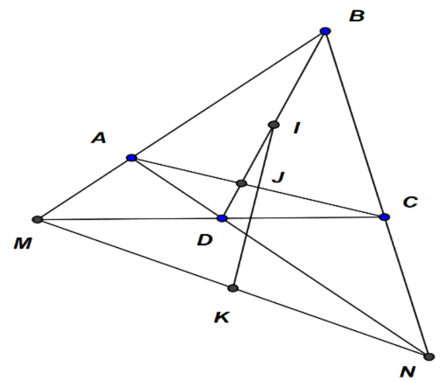
$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{ABD} - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}\left(S_{ADC} - S_{ADIC}\right) - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$S_{NIJ} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{ABD} - S_{BCD}\right) + \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{ABC} + S_{ADC}\right) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

Chứng minh tương tự ta có: $S_{MIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Do đó $S_{NIJ} = S_{MJI}$ hay

$\frac{1}{2}NF.IJ = \frac{1}{2}ME.IJ \Rightarrow ME = NF \Rightarrow S_{NKJ} = S_{MKJ}$



Hai Δ NKJ và Δ MKJ có chung chiều cao hạ từ J.

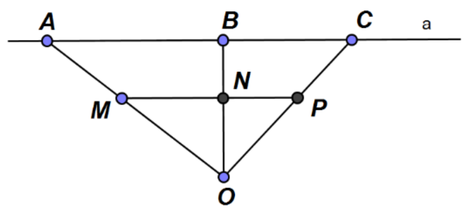
Suy ra: NK’ = MK’.

Mà MK = NK (giả thiết) nên K $\equiv$ K’.

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 8: Ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng a, điểm O không thuộc a. Chứng minh rằng nếu ba điểm M, N, P thỏa mãn hệ thức OM

$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OP}{OC}$ thì M, N, P thẳng hàng.



Giải

Thật vậy, theo định lí Talet đảo thì từ $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

Suy ra: MN // AB.

Tương tự MP // AC.

Nhưng A, B, C thẳng hàng nên M, N, P thẳng hàng (tiên đề Ơcơlit).

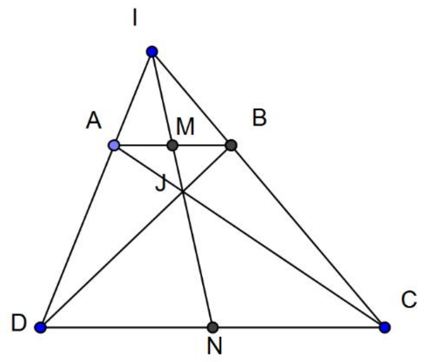
Bài tập 9 (Bổ đề hình thang): Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy nằm trên cùng một đường thẳng.

Giải

Giả sử hình thang đã cho là ABCD (AB // CD, AB < CD) có I, J

tương ứng là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh và của

hai đường chéo.



Gọi M và N lần lượt là giao điểm của IJ với AB và CD.

Do AB // CD nên áp dụng hệ quả của định lí Talet ta có:

$\frac{AM}{DN}=\frac{BM}{CN}\left(=\frac{IM}{IN}\right)$ và $\frac{AM}{CN}=\frac{BM}{DN}\left(=\frac{JM}{JN}\right)$ hay

$\frac{AM}{DN}=\frac{BM}{CN}\left(=\frac{IM}{IN}\right)$

Bài tập 10: Trên mặt phẳng cho n điểm (n > 3) và bất kì đường thẳng nào đi qua hai trong những điểm đó đều chứa một điểm đã cho. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

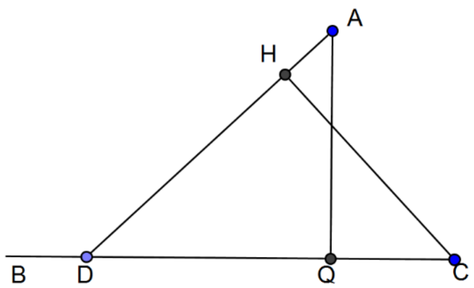
Giải

Giả sử tất cả các điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Qua mỗi cặp điểm đã cho vẽ một đường thẳng (có một số hữu hạn đường này) và chọn khoảng cách khác 0 từ các điểm đã cho đến các đường thẳng này.

Giả sử khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC, trong đó

A, B, C là các điểm đã cho là khoảng cách nhỏ nhất.

Trên đường thẳng BC còn có một điểm D nào đó.



Từ A kẻ AQ vuông góc với BC tại Q.

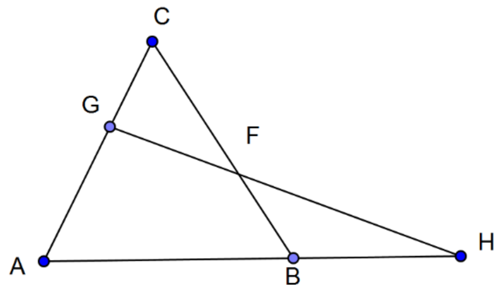
Hai trong các điểm B, C, D nằm cùng một phía đối với điểm Q, chẳng hạn C và D như hình vẽ, khi đó ta có CQ < DQ.

Hạ CH vuông góc với AD tại H.

Dễ thấy CH < AQ. Điều này mâu thuẫn với việc chọn điểm A và đường thẳng BC.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 11 (Định lý MENELAUS): Là một định lý về các tam giác trong hình học phẳng. Cho tam giác ABC. Các điểm H, F, G lần lượt nằm trên AB, BC, CA. Khi đó: G, H, F thẳng hàng khi và chỉ khi: $\frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA}=-1$



Chứng minh

Phần thuận:

Sử dụng định lý sin trong các tam giác AGH , BFH, CGF, ta được:

$$\frac{AH}{GA}=\frac{\sin AGH}{\sin AHG};\frac{BF}{HB}=\frac{\sin BHF}{\sin HFB};\frac{CG}{FC}=\frac{\sin GFC}{\sin CGF};$$

(với lưu ý rằng $\sin AGH=\sin CGF;\sin AHG=\sin BHF;\sin HFB=\sin GFC$)

Nhân từng vế ta được điều phải chứng minh .

Phần đảo:

Gọi $F'=GH\cap BC$

Tương tự ta có được:

$$\frac{AH}{HB}.\frac{BF'}{F'C}.\frac{CG}{GA}=\frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA}(=-1).$$

Hay $\frac{BF'}{F'C}=\frac{BF}{FC'}$ suy ra $F\equiv F'$

Bài tập 1: Cho ΔABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C dựng hình vuông ABDE ; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B dựng hình vuông ACMN. Dựng hình bình hành AEIG. Gọi K là giao điểm của CD và BM. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, K, H thẳng hàng.

Bài tập 2: Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD ta lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho AM = BN = CP = DQ. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng M, O, P thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy. Một điểm B cố định trên Ax, còn một điểm C chuyển động trên Ay. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C chuyển động trên Ay.

Bài tập 4: Trong hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho $EBC=ECB=15^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm E vẽ tam giác đều CDF. Chứng minh rằng B, E, F thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Đường thẳng kẻ từ C song song với AD cắt BD và AB lần lượt tại E và F. Đường thẳng kẻ từ D song song với BC cắt AC và AB lần lượt tại P và Q.

Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Bài tập 6:Trên một đường thẳng lấy bốn điểm theo thứ tự là A, E, F, B. Dựng các hình vuông ABCD, EFGH sao cho chúng nằm cùng ở một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đã cho. Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng :

a) C, O, E thẳng hàng.

b) D, O, F thẳng hàng.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Lấy điểm F điểm đối xứng với C qua E. Từ điểm F kẻ Fx và Fy lần lượt song song với AD và AB. Gọi I là giao điểm của Fx và AB ; K là giao điểm của FI và AD. Chứng minh rằng I, K, E thẳng hàng.

Bài tập 8: Cho ΔABC vuông tại A, cạnh huyền BC = 2AB. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $ABD = \frac{1}{3}ABC$; trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $ACE = \frac{1}{3}ACB$. Gọi F là giao điểm của BD và CE; G và H theo thứ tự là các điểm đối xứng của F qua các cạnh BC và AC. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm H, D, G thẳng hàng.

b) Tam giác EDF cân.

Bài tập 9: Cho góc vuông xOy tam giác. M thuộc Ox; A, B thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP với MB; K là giao điểm của AM với BP; I, K, E lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng minh rằng I, E, N thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông xEy quay quanh đỉnh E có cạnh Ex cắt FG và GH theo thứ tự tại M và N, còn cạnh Ey cắt các đường FG và GH theo thứ tự tạ P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng bốn điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 11: Cho tứ giác ABCD và một điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho các tam giác ABO, BCO, CDO, DAO có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng hoặc ba điểm A, O, C thẳng hàng, hoặc ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Bài tập 12: Cho Δ ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD và CE. Gọi I là điểm thuộc đoạn BC; H là giao điểm của BD và CE; N thuộc đoạn AH ; M thuộc đoạn DE. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Bài tập 13: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông Exy quay quanh đỉnh E. Cạnh Ex cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự tại M và N; cạnh Ey cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự ở P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng 4 điểm F, H, K, I thẳng

hàng.

Bài tập 14: Cho $xOy = 90^0$. Lấy điểm M thuộc Ox, A và B cùng thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P.

Gọi H là giao điểm của AP và MB; K là giao điểm của AM và BP; I, E, N lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng

minh rằng I, E, N thẳng hàng.

BAØI TAÄP TOÅNG HÔÏP KIEÁN THÖÙC

Bài tập 1: Cho Δ ABC có các đường cao BD và CE.Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại hai điểm M và N.

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC nội tiếp.

b) Chứng minh: $DEA = ACB$

c) Chứng minh: DE song song với tiếp tuyến tai A của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh: OA là phân giác của góc MAN

e) Chứng tỏ: $AM^2 = AE.AB$.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O), đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O'), đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Từ M vẽ dây cung DE $\perp$ AB; DC cắt đường tròn (O') tại I.

a) Tứ giác ADBE là hình gì?

b) Chứng minh: Tứ giác DMBI nội tiếp.

c) Chứng minh: Ba điểm B; I; C thẳng hàng và MI = MD.

d) Chứng minh: MC.DB = MI.DC.

e) Chứng minh: MI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bài tập 3: Cho Δ ABC có góc $\hat{A} = 90^0$. Trên AC lấy điểm M sao cho AM < MC. Vẽ đường tròn (O), đường kính CM. Đường thẳng BM cắt (O) tại D. Kéo dài AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh: Tứ giác BADC nội tiếp.

b) Kẻ BC cắt (O) tại E. Chứng minh rằng: MR là phân giác của Δ AED.

c) Chứng minh: CA là phân giác của góc BCS.

Bài tập 4: Cho Δ ABC có góc A = 90^0. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM > MC. Dựng đường tròn (O) đường kính MC. Đường tròn này cắt BC tại E. Đường thẳng BM cắt (O) tại D và đường thẳng AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh: Tứ giác ADCB nội tiếp.

b) Chứng minh: ME là phân giác của AED.

c) Chứng minh: Góc $ASM = ACD$.

d) Chứng tỏ ME là phân giác của AED.

e) Chứng minh: Ba đường thẳng BA; EM; CD đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và AB < AC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD và đường kính AA'. Gọi E; F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AA'.

a) Chứng minh: Tứ giác AEDB nội tiếp.

b) Chứng minh: DB.A'A = AD.A'C.

c) Chứng minh: DE $\perp$ AC.

d) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh: MD = ME = MF.